

Una demostración del Teorema de Wigner para matrices aleatorias

Ana Marlene López Ramos

Abril de 2011

Contenido

Prefacio	3
1 Preliminares	5
1.1 Distribución del semicírculo	9
1.2 Números de Catalan	9
1.3 Gráficas	11
1.3.1 De la traza a las gráficas cíclicas	13
1.3.2 Procedimiento de truncamiento	18
1.3.3 Operaciones con aristas de una gráfica	19
1.3.4 Cotas superiores para γ	22
2 El Teorema de Wigner	25
2.1 Demostración del Teorema de Wigner	26
2.1.1 Convergencia en esperanza de $\bar{M}_{k,N}$	26
2.1.2 Convergencia casi segura de $\bar{M}_{k,N}$	30
2.1.3 Comparación de $M_{k,N}$ y $\bar{M}_{k,N}$	36
2.1.4 Convergencia de la FDEE original	37
3 Estudio de simulación	39
3.1 Ejemplos bajo los supuestos del Teorema de Wigner	41
3.2 Ejemplos sin los supuestos del Teorema de Wigner	44
A Demostraciones	47
B Resultados de Probabilidad	59
B.1 Tipos de convergencia	59
B.1.1 Convergencia en probabilidad	59
B.1.2 Desigualdad de Chebyshev	59
B.1.3 Convergencia casi segura	60
B.1.4 Convergencia en distribución y débil	60
B.1.5 Lema de Borel-Cantelli	60
B.2 Notación “O grande”	61
Bibliografía	63

Prefacio

En esta tesis se presenta una demostración del Teorema de Wigner para matrices aleatorias simétricas reales. Este resultado juega un papel fundamental en la teoría de matrices aleatorias, área que actualmente está siendo ampliamente investigada, ver [3], [7], [9].

Una *matriz de Wigner* es una matriz aleatoria simétrica (o hermitiana en el caso complejo). Estas matrices juegan un papel importante en Física Nuclear y Física Matemática. Para aplicaciones en estas áreas ver el libro de Mehta (2004) [9].

Sea A_N una matriz aleatoria de dimensión $N \times N$, con eigenvalores $\lambda_{N,j}$, $j = 1, 2, \dots, N$. Si A_N es simétrica, estos eigenvalores son reales. En consecuencia, es posible definir una función de distribución unidimensional

$$F^{A_N}(x) = \frac{1}{N} \# \{j \leq N : \lambda_{N,j} \leq x\},$$

llamada la *función de distribución espectral empírica (FDEE)* de la matriz A_N .

Uno de los principales problemas en Teoría de matrices aleatorias es investigar la convergencia de la sucesión de FDEE's $\{F^{A_N}\}_{N \geq 1}$ para una sucesión de matrices aleatorias dada $\{A_N\}_{N \geq 1}$. El límite de la FDEE de la sucesión $\{A_N\}$ si existe se llama *distribución espectral asintótica F*.

La investigación del límite de la FDEE de matrices aleatorias A_N cuando $N \rightarrow \infty$ es de gran interés entre físicos, matemáticos, probabilistas y estadísticos, entre otros. El interés en la FDEE radica en que muchas estadísticas importantes en análisis estadístico multivariado se pueden expresar en términos de la FDEE. Un ejemplo es el siguiente.

Sea A una matriz definida positiva de dimensión $n \times n$. Tenemos que

$$\det(A) = \prod_{j=1}^n \lambda_{N,j} = \exp \left[n \int_0^\infty (\log x) F^A(dx) \right],$$

donde F^A es la FDEE de la matriz A .

En particular en esta tesis, consideraremos matrices de Wigner reales, *i.e.*, matrices aleatorias simétricas reales tales que $A_N = (a_{ij})$, donde las variables aleatorias a_{ij} son independientes si $1 \leq i \leq j \leq N$.

El objetivo principal de esta tesis es presentar una demostración detallada del Teorema de Wigner, el cual establece que bajo ciertas condiciones sobre A_N ,

$$F^{A_N}(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{c.s.} F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

donde $F(x)$ es la *función de distribución del semicírculo* cuya función de densidad está dada por $f(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-t^2}$, $-2 \leq t \leq 2$, *i.e.*, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ cuya expresión explícita se

puede ver en la Sección 1, usando herramienta de teoría de gráficas, combinatoria y técnicas de probabilidad relacionadas con los métodos de momentos y truncamiento, así como el uso de la desigualdad de Chebyshev y el Lema de Borel-Cantelli. Se utiliza el método del truncamiento debido a que la prueba se realizará pidiendo que las componentes de la matriz aleatoria tengan un determinado número de momentos finitos.

Como segundo objetivo de esta tesis es ilustrar la validez del Teorema de Wigner para matrices aleatorias mediante un estudio de simulación.

En 1958 Wigner [12] da una demostración heurística del teorema solicitando una matriz de dimensión N con entradas reales, simétrica, donde las variables aleatorias a_{ij} son independientes para $1 \leq i \leq j \leq N$, todos los momentos de los a_{ij} existen y el segundo momento de todos las a_{ij} es el mismo.

Arnold [2] demuestra el Teorema de Wigner pidiendo la existencia del sexto momento en las componentes de la matriz aleatoria fuera de la diagonal y cuarto momento en las componentes de la diagonal. La demostración de Arnold está basada en el método de momentos y del truncamiento.

Guionnet [7] demuestra el Teorema de Wigner pidiendo una cota uniforme de todos los momentos de las componentes de la matriz aleatoria.

Bai, Z. y Silverstein [3] presenta una demostración usando elementos de Teoría de Gráficas. Como primer paso remueve los elementos de la diagonal, después trunca las variables que están fuera de la diagonal de la matriz y utiliza el método de momentos para concluir su demostración.

Domínguez Molina y Rocha Arteaga [5] dan una demostración detallada del Teorema de Wigner usando herramienta de Teoría de gráficas y combinatoria.

Esta tesis se basa principalmente en el trabajo de Arnold [2] siguiendo su enfoque. Se desarrolla en forma más detallada su demostración, se incorpora la herramienta de gráficas usada por Domínguez Molina y Rocha Arteaga [5].

La organización de esta tesis es la siguiente: en el Capítulo 1, se da una introducción del Teorema de Wigner, se introducen los Números de Catalan mostrándolos como solución de varios problemas en diferentes áreas de las matemáticas, se presenta la herramienta de teoría de gráficas que se utiliza para demostrar el Teorema. En el Capítulo 2 se presenta la demostración del Teorema de Wigner, primero demostrando la convergencia de los momentos de la FDEE y después la convergencia casi segura. El Capítulo 3 contiene un estudio de simulación donde se generan nueve tipos de matrices aleatorias, en tres de ellas se cumplen las hipótesis del Teorema de Wigner y en el resto se consideran los casos en que se incumplen algunas hipótesis de dicho teorema, a saber, el número de momentos finitos, la centralidad de los elementos fuera de la diagonal y la independencia de los componentes de la matriz aleatoria. El estudio de simulación se basa en comparar los histogramas de los eigenvalores de distintas matrices aleatorias con la función de densidad del semicírculo. En el Apéndice A se encuentran las demostraciones de los lemas, teoremas, corolarios y proposiciones que utilizamos en el desarrollo de la demostración. Por último en el Apéndice B contiene algunas definiciones y resultados de la teoría de Probabilidad que utilizamos en esta tesis.

Capítulo 1

Preliminares

Una *matriz aleatoria* es una matriz cuyas componentes son variables aleatorias. Una propiedad importante que tienen las matrices aleatorias simétricas es que sus valores propios son reales y aleatorios.

Sea $A_N = (a_{ij})$ una *matriz de Wigner*, i.e., una matriz aleatoria simétrica real de $N \times N$, donde las componentes a_{ij} son variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) donde Ω es el espacio muestral y P es la medida de probabilidad definida sobre la σ -álgebra de eventos \mathcal{F} .

Usaremos la abreviación *v.a.i.i.d.* de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Los supuestos sobre las componentes de la matriz aleatoria A_N son los siguientes:

Sean G y H funciones de distribución reales.

1. $a_{11} \sim G$ y $E|a_{11}|^{4+\tau} < \infty, 0 < \tau < 1$.
2. $a_{12} \sim H, Ea_{12} = 0, Ea_{12}^2 = 1$ y $E|a_{12}|^{6+\varepsilon} < \infty, 0 < \varepsilon < 1$.
3. $a_{ij} = a_{ji}$ si $1 \leq i < j \leq N$.
4. $a_{ij} \stackrel{D}{=} a_{12}$ si $1 \leq i < j \leq N$.
5. $a_{ii} \stackrel{D}{=} a_{11}$ si $1 \leq i \leq N$.
6. a_{ij} son *v.a.i.i.d.* si $1 \leq i \leq j \leq N$.

La función de densidad del semicírculo, ver Figura 1.1, tiene la siguiente expresión

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & \text{si } |x| \leq 2, \\ 0, & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

La función de distribución del semicírculo, ver Figura 1.2, está dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsen \frac{x}{2} + \frac{1}{4\pi} x \sqrt{4-x^2}, & \text{si } |x| \leq 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad (1.1)$$

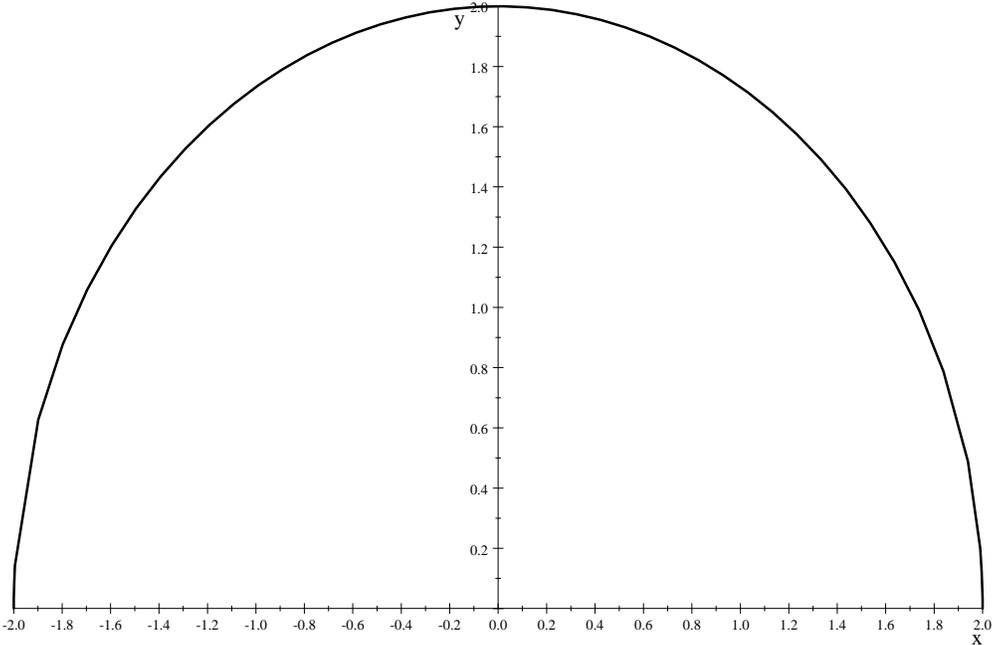


Figura 1.1: Función de densidad del semicírculo

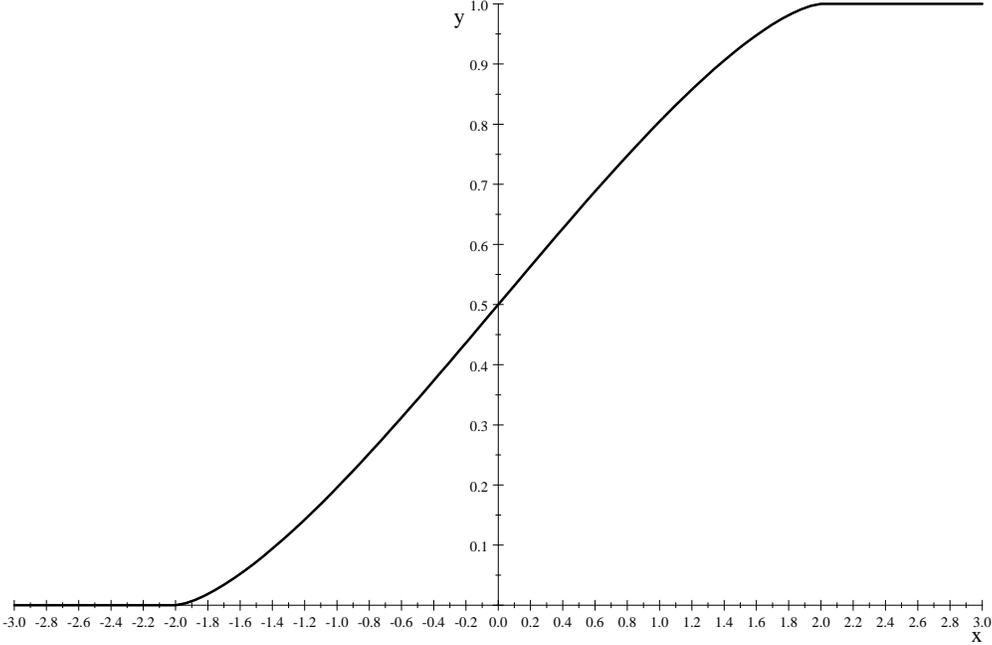


Figura 1.2: Función de distribución del semicírculo

El cálculo de los momentos de la distribución del semicírculo se detalla en el Apéndice A, en la demostración del Lema 3.

Consideremos ahora propiedades de los eigenvalores de la matriz aleatoria.

Sea la matriz aleatoria

$$B_N = \frac{1}{\sqrt{N}}A_N,$$

denotemos sus eigenvalores por $\lambda_{N,1}, \lambda_{N,2}, \dots, \lambda_{N,N}$, cuya FDEE está dada por

$$F^{B_N}(x) = \frac{1}{N} \# \{i : \lambda_{N,i} \leq x, 1 \leq i \leq N\}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

La FDEE se puede interpretar como una función de distribución aleatoria uniforme en los eigenvalores $\lambda_{N,1}, \lambda_{N,2}, \dots, \lambda_{N,N}$, donde cada uno de estos eigenvalores tiene la probabilidad $\frac{1}{N}$ de ocurrir.

El Teorema de Wigner establece, que bajo ciertas condiciones sobre B_N ,

$$F^{B_N}(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{c.s.} F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

donde $F(x)$ está dada en 1.1.

Utilizaremos el método de momentos para probar (1.3). Éste es uno de los métodos más populares en la teoría de matrices aleatorias, el cual utiliza el *Teorema de convergencia de momentos*, i.e., considere una sucesión, $\{H_n\}_{n \geq 1}$, de funciones de distribución con momentos finitos de todos los órdenes. El Teorema de convergencia de momentos determina bajo qué condiciones la convergencia de los momentos de todos los órdenes implica la convergencia en distribución de la sucesión de distribuciones $\{H_n\}_{n \geq 1}$.

Denotemos el k -ésimo momento de H_n por

$$\beta_{n,k} = \int x^k H_n(dx).$$

La justificación del método de momentos lo da el siguiente lema:

Lema 1 (Teorema de convergencia de momentos) *Una sucesión de funciones de distribución $\{H_n\}$ converge débilmente a una función de distribución, H , i.e.,*

$$H_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} H(x),$$

para todo x , punto de continuidad de H , si se satisfacen las siguientes condiciones:

i) Cada H_n tiene momentos de todos los órdenes.

ii) Para cada $k \geq 0$,

$$\int x^k H_n(dx) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int x^k H(dx).$$

iii) H está determinada de manera única por sus momentos.

Cuando aplicamos el Lema 1, necesitamos verificar la condición (iii) del lema anterior. El siguiente lema da una condición que implica (iii) del Lema 1.

Lema 2 Sea $\{\beta_k\}_{k \geq 1}$ la sucesión de los momentos de la función de distribución H . Si

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \beta_{2m}^{\frac{1}{2m}} < \infty, \quad (1.4)$$

entonces H está determinada de manera única por su sucesión de momentos $\{\beta_k\}_{k \geq 0}$.

La demostración de los Lemas 1 y 2 se encuentran en el Apéndice B de [3].

Las condiciones sobre las variables aleatorias a_{11} y a_{12} no se relajarán más allá de pedir momento finito de orden $4 + \tau$, $0 < \tau < 1$ para a_{11} y momento finito de orden $6 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, para a_{12} . Es más simple trabajar con variables aleatorias que tengan todos los momentos finitos, con este fin utilizaremos variables aleatorias truncadas de a_{11} y a_{12} las cuales tendrán todos sus momentos.

El método de truncamiento consiste en truncar la variable aleatoria de interés, X , en un valor determinado, c , de manera que la nueva variable aleatoria tenga todos sus momentos, lo cual se cumple si definimos \bar{X} como

$$\bar{X} = \begin{cases} X & \text{si } |X| < c, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Podemos ver que $E|\bar{X}|^r < \infty$ ya que

$$E|\bar{X}|^r = \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{x}|^r H(dx) = \int_{|x| < c} |x|^r H(dx) \leq c^r P(|\bar{X}| < c) < \infty, \quad \forall r \geq 1,$$

donde H es una función de distribución. La probabilidad $P(X \neq \bar{X}) = P(|X| \geq c)$ siempre se puede hacer arbitrariamente pequeña, eligiendo un valor apropiado de c .

Antes de continuar, necesitamos discutir los momentos de la distribución del semicírculo.

El Lema 3 dice que los momentos pares, $k = 2m$, de la distribución del semicírculo están dados por

$$\beta_{2m} = C_m = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}, \quad m \geq 0$$

y $\beta_{2m+1} = 0$.

Observemos que

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{1}{m+1} \frac{(2m)!}{m!m!} < \frac{[1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2m-1)] [2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2m]}{m!m!} \\ &< \frac{[2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2m] 2^m [1 \times 2 \times 3 \times \dots \times m]}{m!m!} = 2^{2m} = 4^m \end{aligned}$$

Se sigue entonces que los números de Catalan, *i.e.*, los momentos pares de la distribución del semicírculo, cumplen la condición 1.4, *i.e.*,

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \beta_{2m}^{\frac{1}{2m}} = \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} C_m^{\frac{1}{2m}} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} (4^m)^{\frac{1}{2m}} = 0 < \infty,$$

lo que nos garantiza, de acuerdo con el Lema 2 que la distribución del semicírculo está determinada de manera única por sus momentos. Esto nos da (iii) del Lema 1.

1.1 Distribución del semicírculo

A partir de la década de los 50's la distribución del semicírculo, también conocida como distribución de Wigner, ha surgido de manera relevante en Teoría de probabilidad y en diversas áreas de las matemáticas. En la Teoría de Probabilidad libre ésta juega el papel que tiene la distribución normal en la Teoría de Probabilidad clásica. Una de sus aplicaciones más importantes la tiene en la Teoría de Matrices Aleatorias, donde esta distribución aparece como límite de la distribución espectral de matrices aleatorias.

Lema 3 *Los momentos pares de la distribución del semicírculo están dados por los números de Catalan $C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$, esto es*

$$\int_{-2}^2 x^{2k} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} dx = C_k.$$

Los momentos impares son cero por la simetría de la distribución.

1.2 Números de Catalan

Los *números de Catalan* son la solución de varios problemas en diferentes áreas de las matemáticas, deben su nombre al matemático Belga Eugène Charles Catalan, quien los “descubrió” en 1838 mientras estudiaba el problema de las sucesiones de paréntesis bien formados. Aunque estos números fueron nombrados en honor a Catalan, ya se conocían antes de él; alrededor de 1751 Leonhard Euler, los descubrió mientras estudiaba el problema de la triangulación de polígonos convexos.

Los números de Catalan están definidos como

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Veamos algunos ejemplos para $n = 3$. En este caso $C_3 = 5$.

Los números de Catalan cuentan el número de expresiones que contienen n pares de paréntesis correctamente colocados, por ejemplo para $n = 3$

$$((())), ()(), ()(), (())(), (())$$

Una *triangulación de un polígono* es una manera de descomponerlo como una unión disjunta de triángulos, cuyos vértices coinciden con los del polígono. El número de formas distintas de cortar un polígono convexo de $n + 2$ lados en triángulos conectando vértices con líneas rectas sin que ninguna se corte también está dado por los números de Catalan. La Figura 1.3 ilustra el caso de los polígonos de $5 = 3 + 2$ lados.

Un *camino de Dyck* es el resultado de una caminata con $2n$ pasos de longitud constante y en las direcciones noreste y sureste, y de manera tal que nunca nos encontramos en un punto con altura menor a la altura que teníamos al inicio del recorrido y se termina el recorrido a la altura en donde se inició. Estas trayectorias también las contamos con los números de Catalan. En la Figura 1.4 se observan las cinco caminatas de 6 pasos.

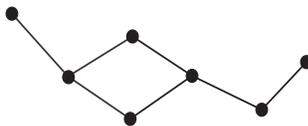


Figura 1.5: Gráfica conexa con un ciclo.

1.3 Gráficas

Con el fin de calcular los límites de los momentos de la FDEE de una matriz de Wigner, necesitaremos utilizar algunas herramientas de teoría de gráficas. Esto es necesario porque la media y la varianza de cada momento empírico quedará expresado como una suma de esperanzas de producto de las componentes de la matriz. A cada término de esta suma le asociamos una gráfica lo que permitirá contar sistemáticamente el número de términos significativos. Por este motivo, introduciremos algunos conceptos de teoría de gráficas y estableceremos algunos lemas. Se recomienda el libro de teoría de gráficas [4], la Parte 3 de [6], y el Capítulo 9 de [11] para una introducción a la teoría de gráficas.

Definición 4 Sea V un conjunto finito no vacío, $E \subset V \times V$. El par (V, E) es una gráfica dirigida (digráfica) sobre V , donde V es el conjunto de vértices y E es el conjunto de aristas. Usaremos la notación $G = (V, E)$.

Si no se toma en cuenta la dirección de las aristas, E será un conjunto de pares no ordenados de $V \times V$ y diremos que $G = (V, E)$ es una gráfica no dirigida. En una gráfica no dirigida denotaremos las aristas por $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Definición 5 Sea $G = (V, E)$ una gráfica, una arista $(a, b) \in E$ es incidente a $v \in V$ si $v \in \{a, b\}$. Para cualquier vértice $v \in V$ se define $\text{grad}(v)$ como el número de aristas en E que son incidentes con v .

Definición 6 Sean u, v vértices de una gráfica no dirigida $G = (V, E)$. Llamaremos camino u - v en G a una sucesión finita e_1, e_2, \dots, e_n , $e_l = \{i_l, i_{l+1}\}$, $1 \leq l \leq n$, $i_1 = u$, $i_{n+1} = v$. Si en un camino u - v se tiene que $u = v$ se dice que el camino es un ciclo (camino cerrado), en otro caso es camino abierto. Un ciclo de la forma (v, v) se llamará lazo. Una gráfica cuyas aristas forman un ciclo se llamará gráfica cíclica.

Definición 7 Sea $G = (V, E)$ una gráfica no dirigida. G es conexa si existe un camino entre cualesquiera dos vértices de G .

Las gráficas cíclicas son conexas.

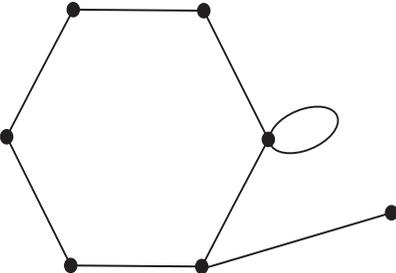


Figura 1.6: Gráfica conexa con un lazo.

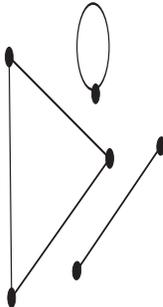


Figura 1.7: Gráfica no conexa.

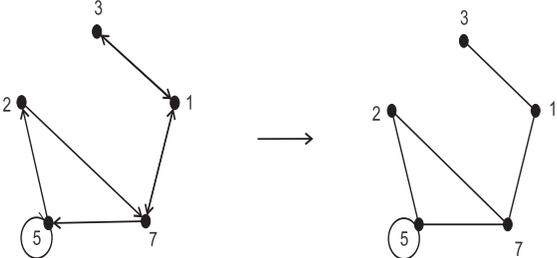


Figura 1.8: Gráfica G y su esqueleto \tilde{G} .

Definición 8 Sea $G = (V, E)$ una gráfica y sea $(a, b) \in E$, al número, $m \geq 1$, de veces que se repite (a, b) más el número de veces que se repite (b, a) se le llamará multiplicidad de la arista (a, b) , obsérvese que la multiplicidad de (a, b) es igual a la multiplicidad de la arista (b, a) , si ésta existe. Diremos que una arista es simple si su multiplicidad es 1. La gráfica G será una multigráfica si existe una arista en E con multiplicidad mayor o igual que 2.

Definición 9 El esqueleto $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ de una gráfica dirigida $G = (V, E)$ es la gráfica obtenida de G sin tomar en cuenta las direcciones de las aristas, ni las aristas repetidas. Diremos que una gráfica dirigida es conexa cuando el esqueleto es conexo.

El lema siguiente nos dice que una gráfica conexa no tiene más vértices que aristas excepto en el caso de los árboles donde el número de vértices es mayor en uno que el número de aristas (ver Lema 24).

Utilizaremos $|\cdot|$ para indicar cardinalidad de un conjunto.

Lema 10 Si $G = (V, E)$ es una gráfica conexa entonces

$$|V| \leq |E| + 1.$$

1.3.1 De la traza a las gráficas cíclicas

Consideremos la traza de la potencia k -ésima de una matriz cuadrada, $k \geq 1$.

Sea $A = (a_{ij})$ $1 \leq i, j \leq N$ una matriz.

Sean

$$\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \{1, 2, \dots, N\}^k,$$

$$\sum_{\mathbf{i}} = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N = \sum_{i_1=1}^N \dots \sum_{i_k=1}^N$$

Lema 11 En cualquier matriz A de $N \times N$ se cumple que

$$(A^k)_{i_1 i_1} = \sum_{i_2, \dots, i_k=1}^N a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i_1}.$$

Del Lema 11 podemos escribir la traza de la k -ésima potencia de A como

$$\begin{aligned} \text{tr}(A^k) &= \sum_{i_1=1}^N (A^k)_{i_1 i_1} = \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2, \dots, i_k=1}^N a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i_1} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i_1}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

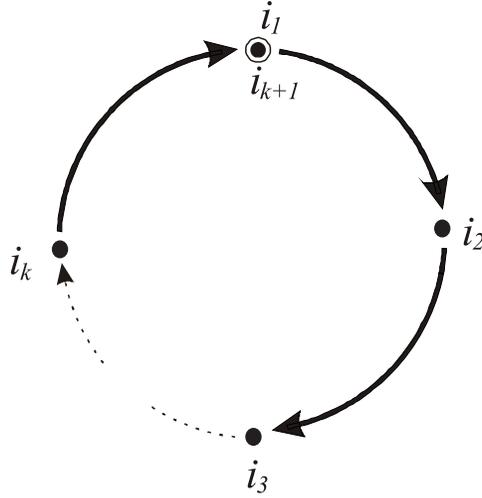


Figura 1.9: Gráfica cíclica inducida por la traza.

Nótese que los subíndices de los términos de la sumatoria, i.e., $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_1)$ se pueden asociar a las aristas dirigidas de una gráfica que en sí misma es un ciclo de longitud k . Así, la estructura cíclica que la traza induce, permite identificar a cada índice $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, N\}^k$ de la suma en la ecuación 1.5 con una gráfica conexa cíclica, $G(\mathbf{i}) = (V(\mathbf{i}), E(\mathbf{i}))$, donde

$$\begin{aligned} V(\mathbf{i}) &= \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \text{ vértices,} \\ E(\mathbf{i}) &= \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_1)\} \text{ aristas dirigidas.} \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde $1 \leq i_j \leq N, 1 \leq j \leq k$.

Para $k \geq 1, N \geq 1$ sea

$$\Lambda_k = \{(V, E) : V = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}, E = \{e_1, \dots, e_k\}, e_j = (i_j, i_{j+1}), 1 \leq j \leq k, 1 \leq i_j \leq N\},$$

con la convención de que $i_{k+1} = i_1$.

Para $1 \leq m \leq k$. Sea $\Lambda_{k,m} = \{(V, E) \in \Lambda_k : |V| = m\}$, entonces se cumple que $\Lambda_{k,m_1} \cap \Lambda_{k,m_2} = \emptyset$ si $m_1 \neq m_2$, por lo que

$$\Lambda_k = \bigcup_{m=1}^k \Lambda_{k,m},$$

siendo esta unión ajena.

Definición 12 Dos gráficas $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfas, denotado por $G_1 \cong G_2$, si existe una biyección $\theta : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $(u, v) \in E_1 \iff (\theta(u), \theta(v)) \in E_2$.

Lema 13 La relación " \cong " es una relación de equivalencia en $\Lambda_{k,m}$.

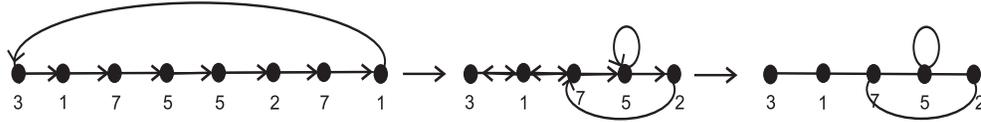


Figura 1.10: Una gráfica de $\Lambda_{8,5}$

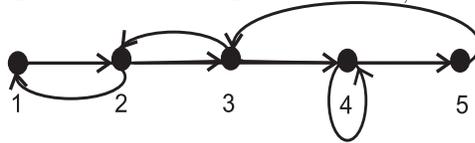


Figura 1.11: Gráfica canónica

Definición 14 *Llamaremos a una gráfica $\Gamma_{k,m}$ -canónica si ésta tiene las siguientes propiedades:*

1. El conjunto de vértices es $V = \{1, \dots, m\}$.
2. Existe una función g de $\{1, \dots, k\}$ sobre $\{1, \dots, m\}$ tal que $g(1) = 1$ y

$$g(i) \leq \max \{g(1), \dots, g(i-1)\} + 1 \quad \text{para } 2 \leq i \leq k.$$
3. Las aristas de E son de la forma:

$$e_i = (g(i), g(i+1)), \quad \text{para } i = 1, \dots, k,$$

con la convención de que $g(k+1) = g(1) = 1$.

Sea $\ell, m \leq \ell \leq k$ tal que $g(\ell) = m$, y $r < s \leq m$ la condición 3 nos garantiza que antes de llegar al vértice m no se puede llegar por primera vez a s sin pasar antes por r .

Proposición 15 *Cada clase de equivalencia contiene una, y solo una, gráfica $\Gamma_{k,m}$ -canónica.*

La Proposición 15 es consecuencia de los siguientes dos lemas.

Lema 16 *Dos gráficas $\Gamma_{k,m}$ -canónicas no son equivalentes.*

Sea $C_{k,m}$ el número de clases de equivalencia en $\Lambda_{k,m}$ que induce “ \cong ”.

Denotemos por $\Gamma_{k,m,l}$ con $l = 1, 2, \dots, C_{k,m}$ las distintas gráficas $\Gamma_{k,m}$ -canónicas.

Lema 17 *Si $G \in \Lambda_{k,m}$ entonces $G \in [\Gamma_{k,m,l}]$, para algún $1 \leq l \leq C_{k,m}$.*

Ejemplo 18 *Sea una $G \in \Lambda_{8,5}$, $G = (\{1, 2, 3, 5, 7\}, \{(3, 1), (1, 7), (7, 5), (5, 5), (5, 2), (2, 7), (7, 1), (1, 3)\})$, esta gráfica es equivalente a gráfica $\Gamma_{8,5}$ -canónica $(\{1, \dots, 5\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (3, 2), (2, 1)\})$, ver Figura 1.10.*



Figura 1.12: Árbol.

Dado que $|\Lambda_k| = N^k < \infty$ y que $\Lambda_{k,m} \subset \Lambda_k$ se sigue que $|\Lambda_{k,m}| < \infty$, por lo tanto, de acuerdo con la Proposición 15, podemos tomar a cada gráfica canónica como elemento representante. De esta manera obtenemos la siguiente partición de $\Lambda_{k,m}$

$$\Lambda_{k,m} = \bigcup_{l=1}^{C_{k,m}} [\Gamma_{k,m,l}],$$

donde $\Gamma_{k,m,l}$, $1 \leq l \leq C_{k,m}$, es una enumeración de las gráficas $\Gamma_{k,m}$ -canónicas.

Lema 19 *El número de elementos de cada clase de equivalencia de $\Lambda_{k,m}$ es*

$$|[\Gamma_{k,m,l}]| = P_m^N = N! / (N - m)!$$

Proposición 20 *El número de elementos de $\Lambda_{k,m}$ es*

$$|\Lambda_{k,m}| = C_{k,m} P_m^N.$$

Observemos que $N^k = |\Lambda_k| = \sum_{m=1}^k P_m^N C_{k,m}$.

Lema 21 *Sea $G(\mathbf{i}) \in \Lambda_{k,m}$ con k par y $m = \frac{k}{2} + t$, $2 \leq t \leq \frac{k}{2}$, entonces $G(\mathbf{i})$ tiene al menos $2t$ aristas simples.*

Lema 22 *Sea $G(\mathbf{i}) \in \Lambda_{k,m}$ con k impar y $m = \lceil \frac{k}{2} \rceil + t$, $2 \leq t \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$, entonces $G(\mathbf{i})$ tiene al menos $2t - 1$ aristas simples.*

Definición 23 *Un árbol es una gráfica conexa sin ciclos.*

Lema 24 *Si $G = (V, E)$ es una gráfica conexa no dirigida entonces $|V| = |E| + 1$ si, y sólo si, G es árbol.*

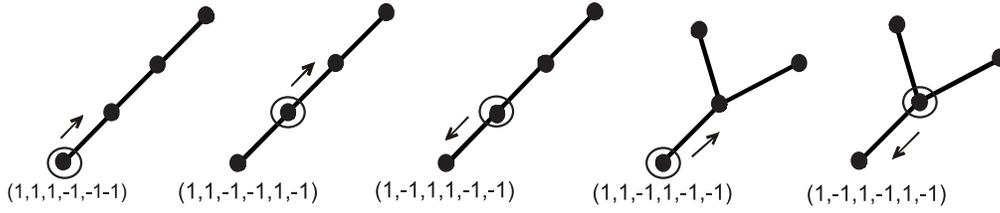


Figura 1.13: Árboles con tres aristas orientados con raíz.

Un *árbol con raíz* es un árbol al que se le ha especificado un vértice al que llamaremos *raíz*. Un *árbol orientado con raíz* es un árbol con raíz inmerso en un plano, cuyo contorno se recorre sobre el plano siempre en un mismo sentido previamente convenido, de la siguiente manera: el recorrido inicia y termina en la raíz, al término del recorrido se recorre la misma cantidad de aristas de ida que de vuelta y en cada paso del recorrido no se tienen más aristas recorridas de vuelta que de ida. El propósito es contar el número de árboles orientados con raíz.

A cada árbol orientado con raíz de k aristas lo identificamos con la $2k$ -tupla (ξ_1, \dots, ξ_{2k}) construida de la siguiente manera, si en el i -ésimo paso del recorrido la arista en turno es recorrida por primera vez entonces $\xi_i = 1$ y si ya se había pasado por ella entonces $\xi_i = -1$.

Esto nos da una biyección entre los árboles orientados con raíz de k aristas y el subconjunto T_{2k} de $\{-1, 1\}^{2k}$ que consta de los elementos (ξ_1, \dots, ξ_{2k}) tales que

$$\begin{aligned} \xi_i &= \pm 1 \\ \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{2k} &= 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2k. \end{aligned} \tag{1.7}$$

La segunda condición garantiza que el recorrido inicia y termina en la raíz, y que al término del recorrido el número de aristas que se recorren de ida sea igual a los que se recorren de vuelta, la tercera condición indica que en cualquier parte del recorrido nunca se recorren más aristas de regreso.

En la Figura 1.13 se muestran los cinco árboles orientados con raíz con tres aristas, a los cuales les corresponden $(1, 1, 1, -1, -1, -1)$, $(1, 1, -1, -1, 1, -1)$, $(1, -1, 1, 1, -1, -1)$, $(1, 1, -1, 1, -1, -1)$, $(1, -1, 1, -1, 1, -1)$, respectivamente.

La sucesión de ξ_1, \dots, ξ_{2k} nos servirá para encontrar una biyección entre los árboles dirigidos con raíz y los árboles binarios, los cuales los contaremos de manera similar.

Un *árbol binario* es un árbol en el que todo vértice tiene grado uno, dos o tres. A un vértice con grado dos se le llama *padre inicial*, a un vértice con grado tres se le llama *padre*; y se le llama *hijo* a un vértice con grado uno. Cada padre tiene dos hijos llamados hijo de la derecha e hijo de la izquierda.

De manera similar que en el caso de los árboles con raíz, podemos contar los árboles binarios con k padres, identificándolos también con $2k$ -tuplas. Para esto, recorreremos el árbol binario iniciando por la arista que une al padre inicial (vértice con dos árboles) con su hijo de la derecha. A cada árbol binario le asociamos la $2k$ -tupla $(\xi'_1, \dots, \xi'_{2k})$, la cual construimos de la siguiente manera: partiendo del padre inicial recorreremos en sentido horario, si la arista por la que pasamos conecta al hijo de la derecha hacemos $\xi'_i = 1$ y si conecta con el hijo de la izquierda $\xi'_i = -1$, no se contabilizan los hijos por los que ya se hayan pasado.

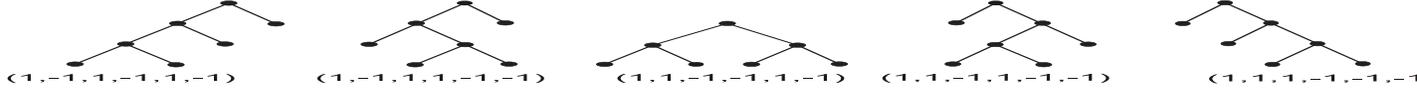


Figura 1.14: Árboles binarios con 3 padres.

Considerando los cinco árboles binarios con tres padres a los que les asociamos $(1, -1, 1, -1, 1, -1)$, $(1, -1, 1, 1, -1, -1)$, $(1, 1, -1, -1, 1, -1)$, $(1, 1, 1, -1, -1, -1)$, $(1, 1, -1, 1, -1, -1)$.

Claramente esta sucesión ξ'_1, \dots, ξ'_{2k} es una permutación válida de la sucesión ξ_1, \dots, ξ_{2k} , y cumple (1.7), por lo que se tiene una biyección entre ξ'_1, \dots, ξ'_{2k} y ξ_1, \dots, ξ_{2k} . Esto nos da una biyección entre los árboles orientados con raíz y los árboles binarios.

Proposición 25 *Hay C_k árboles binarios con k padres.*

Proposición 26 *El número de árboles orientados con raíz que se pueden formar con k aristas es igual al k -ésimo número de Catalan.*

1.3.2 Procedimiento de truncamiento

Este procedimiento consiste en truncar variables aleatorias para trabajar con variables aleatorias que tengan momentos finitos.

Sea $M_{k,N}$ el k -ésimo momento de orden k de F^{B_N} dada en (1.2), entonces

$$\begin{aligned} M_{k,N} &: = \int x^k F^{B_N}(dx) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \lambda_{N,j}^k = \frac{\text{tr}(B_N^k)}{N} = \frac{\text{tr}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{N}}A_N\right)^k\right)}{N} \\ &= \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^N a_{i_1 i_2}, a_{i_2 i_3}, \dots, a_{i_k i_1}. \end{aligned}$$

Vamos a truncar las variables a_{ij} en \sqrt{N} , para obtener las nuevas variables \bar{a}_{ij} , con

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{si } |a_{ij}| < \sqrt{N}, \\ 0, & \text{si } |a_{ij}| \geq \sqrt{N}, \end{cases}$$

y definamos

$$\bar{M}_{k,N} := \int x^k F^{\bar{B}_N}(dx) = \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{i_1=1}^N \dots \sum_{i_k=1}^N \bar{a}_{i_1 i_2}, \bar{a}_{i_2 i_3}, \dots, \bar{a}_{i_k i_1}. \quad (1.8)$$

Tenemos que la esperanza de $\bar{M}_{k,N}$ se puede escribir como

$$E(\bar{M}_{k,N}) = \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N E(\bar{a}_{i_1 i_2}, \bar{a}_{i_2 i_3}, \dots, \bar{a}_{i_k i_1}) = \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{G(\mathbf{i})} Q(G(\mathbf{i})), \quad (1.9)$$

donde $Q(G(\mathbf{i})) = E(\bar{a}_{i_1 i_2}, \bar{a}_{i_2 i_3}, \dots, \bar{a}_{i_k i_1})$.

En el desarrollo de la demostración usaremos los siguientes Lemas.

Lema 27 *Sea H una función de distribución, si $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p H(dx) < \infty$, y $p \geq 1$ entonces, se tienen los siguientes resultados*

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{(p-r)/2} \int_{|x| < \sqrt{n}} x^r H(dx) < \infty, \quad \forall r \geq p + 1.$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \sqrt{n}} |x|^p H(dx) = 0.$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{(p-1)/2} \int_{|x| \geq \sqrt{n}} x H(dx) \right) = 0.$$

Lema 28 *Sea H una función de distribución, si $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p H(dx) < \infty$, $p \geq 1$, y $\int x H(dx) = 0$ entonces, se cumple el siguiente límite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{(p-1)/2} \int_{|x| < \sqrt{n}} x H(dx) \right) = 0.$$

Lema 29 *Sea H una función de distribución. Si $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p+\varepsilon} H(dx) < \infty$, $p > 0$, $r > 0$ y $\varepsilon > 0$ tal que $p + \varepsilon < r$, entonces el siguiente límite es cierto*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{\frac{p-r}{2}} \int_{|x| < \sqrt{N}} x^r H(dx) = 0.$$

1.3.3 Operaciones con aristas de una gráfica

Consideremos una gráfica $G(\mathbf{i}) \in \Lambda_{k,m}$. Denotemos por m_{ij} , el número de aristas con multiplicidad j en $G(\mathbf{i})$, $1 \leq j \leq k - m + 1$ y por n_{ij} el número de lazos de multiplicidad j , $1 \leq j \leq k - m$. m_{ij} y n_{ij} cumplen que

$$\sum_{j=1}^{k-m+1} j(m_{ij} + n_{ij}) = k, \quad m_{ij} \geq m - 1, \quad n_{ij} \geq 0.$$

Los valores de $Q(G(\mathbf{i}))$ se determinan sólo con los valores de m_{ij} y n_{ij} de la siguiente manera

$$Q(G(\mathbf{i})) = \prod_{j=1}^{k-m+1} (E\bar{a}_{12}^j)^{m_{ij}} (E\bar{a}_{11}^j)^{n_{ij}}. \quad (1.10)$$

Tomando en cuenta que $E\bar{a}_{12}^j < \infty$ para $1 \leq j \leq p$, $E\bar{a}_{12} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$, y $E\bar{a}_{11}^j < \infty$ para $1 \leq j \leq q$, motivados por los lemas 27 (a) y 28 escribiremos la siguiente descomposición de $Q(G(\mathbf{i}))$

$$\begin{aligned} Q(G(\mathbf{i})) &= \left(N^{-\frac{p-1}{2}} N^{\frac{p-1}{2}} E\bar{a}_{12} \right)^{m_{i1}} \left(\prod_{j=2}^p (E\bar{a}_{12}^j)^{m_{ij}} \right) \left(\prod_{j=1}^q (E\bar{a}_{11}^j)^{n_{ij}} \right) \times \\ &\times \prod_{j=p+1}^{k-m+1} \left(N^{-\frac{p-j}{2}} N^{\frac{p-j}{2}} E\bar{a}_{12}^j \right)^{m_{ij}} \prod_{j=q+1}^{k-m} \left(N^{-\frac{q-j}{2}} N^{\frac{q-j}{2}} E\bar{a}_{11}^j \right)^{n_{ij}} \\ &= N^{\frac{1-p}{2} m_{i1} + \frac{1}{2} \sum_{j=p+1}^{k-m+1} (j-p) m_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j=q+1}^{k-m} (j-q) n_{ij}} \left(N^{\frac{p-1}{2}} E\bar{a}_{12} \right)^{m_{i1}} \times \\ &\times \prod_{j=p+1}^{k-m+1} \left(N^{\frac{p-j}{2}} E\bar{a}_{12}^j \right)^{m_{ij}} \prod_{j=q+1}^{k-m} \left(N^{\frac{q-j}{2}} E\bar{a}_{11}^j \right)^{n_{ij}} \prod_{j=2}^p (E\bar{a}_{12}^j)^{m_{ij}} \prod_{j=1}^q (E\bar{a}_{11}^j)^{n_{ij}} \\ &= N^{\gamma(G(\mathbf{i}))} T_{m,k,N}(G(\mathbf{i})), \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde

$$\gamma(G(\mathbf{i})) = \frac{1}{2} (1-p) m_{i1} + \frac{1}{2} \sum_{j=p+1}^{k-m+1} (j-p) m_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j=q+1}^{k-m} (j-q) n_{ij} \quad (1.12)$$

y

$$\begin{aligned} T_{m,k,N}(G(\mathbf{i})) &= \left(N^{\frac{p-1}{2}} E\bar{a}_{12} \right)^{m_{G(\mathbf{i})1}} \prod_{j=p+1}^{k-m+1} \left(N^{\frac{p-j}{2}} E\bar{a}_{12}^j \right)^{m_{G(\mathbf{i})j}} \prod_{j=q+1}^{k-m} \left(N^{\frac{q-j}{2}} E\bar{a}_{11}^j \right)^{n_{G(\mathbf{i})j}} \\ &\times \prod_{j=2}^p (E\bar{a}_{12}^j)^{m_{G(\mathbf{i})j}} \prod_{j=1}^q (E\bar{a}_{11}^j)^{n_{G(\mathbf{i})j}}. \end{aligned}$$

Supongamos que

$$T_{m,k} := \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{G(\mathbf{i})} \{|T_{m,k,N}(\mathbf{i})|\} < \infty.$$

Entonces

$$Q(G(\mathbf{i})) \leq N^{\gamma(G(\mathbf{i}))} T_{m,k}. \quad (1.13)$$

Así

$$E(\bar{M}_{k,N}) = \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{G(\mathbf{i})} Q(G(\mathbf{i})) \leq \frac{T_{m,k}}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{G(\mathbf{i})} N^{\gamma(G(\mathbf{i}))}.$$

Observemos que si encontramos cotas para los valores de $\gamma(G(\mathbf{i}))$, esto nos puede ayudar a simplificar la expresión

$$\sum_{G(\mathbf{i})} N^{\gamma(G(\mathbf{i}))},$$

lo que será de utilidad en la demostración del Teorema de Wigner.

La función $\gamma[G(\mathbf{i})]$ dada en (1.12) se puede calcular para cualquier gráfica con k aristas.

Sea $\Upsilon(k) = (V, E(k))$, $V \neq \emptyset$, $|V| < \infty$ una gráfica con k aristas.

Sea $E(k) = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$

Si $e_j \in E(k)$ definimos la *resta* de una arista a la gráfica $\Upsilon(k)$, como $\Upsilon(k) - e_j = (V, \{e_1, e_2, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_k\})$

Si $e = (u, v)$ definimos la *suma* de una arista a la gráfica $\Upsilon(k)$, como $\Upsilon(k) + e = (V \cup \{u, v\}, \{e_1, e_2, \dots, e_k, (u, v)\})$. Si $e \notin E(k)$ diremos que se *crea* una arista.

La definición de $\gamma[G(\mathbf{i})]$ dada en (1.12) se puede extender a gráficas arbitrarias con k aristas.

Sean $m_j \geq 0$ y $n_j \geq 0$ el número de aristas y lazos de la gráfica $G(\mathbf{i})$, respectivamente, con multiplicidad j .

Se cumple que $\sum_{j=1}^k j(m_j + n_j) = k$.

Sea $p \geq 2, q \geq 1$. Definamos la función

$$\gamma[\Upsilon(k)] = \frac{1}{2}(1-p)m_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=p+1}^k (j-p)m_j + \frac{1}{2} \sum_{j=q+1}^k (j-q)n_j.$$

Estudiaremos el efecto en $\gamma[\Upsilon(k)]$ de la resta y la suma de aristas a la gráfica $\Upsilon(k)$.

Observemos que los valores de m_2, \dots, m_p y de n_1, \dots, n_q no se utilizan en $\gamma[\Upsilon(k)]$. Entonces al restar o sumar aristas a una gráfica $\Upsilon(k)$ hay que tener presente esta información.

Al restar una arista de $\Upsilon(k)$, digamos una de las de multiplicidad m_t , para algún t , $1 \leq t \leq k$, observemos que m_t se reduce en una unidad y que m_{t-1} se incrementa en una unidad, i.e.,

$$\begin{aligned} m_t &\longrightarrow m_t - 1 \\ m_{t-1} &\longrightarrow m_{t-1} + 1, \end{aligned}$$

al restar un lazo de $\Upsilon(k)$ el resultado es similar.

$$\begin{aligned} n_t &\longrightarrow n_t - 1 \\ n_{t-1} &\longrightarrow n_{t-1} + 1. \end{aligned}$$

Más adelante se hará un procedimiento doble que consistirá primero en restar arista y después agregar arista, lo que se puede interpretar como un *reacomodo* de arista en una gráfica.

Sea $e \in E(k)$ y denotemos por m_e a la multiplicidad de e . Entonces

$$\gamma[\Upsilon(k) - e] = \begin{cases} \gamma[\Upsilon(k)] - \frac{1}{2}(1-p) & m_e = 1, \\ \gamma[\Upsilon(k)] + \frac{1}{2}(1-p) & m_e = 2, \\ \gamma[\Upsilon(k)] & 3 \leq m_e \leq p, \\ \gamma[\Upsilon(k)] - \frac{1}{2} & m_e \geq p+1, \end{cases}$$

Sea (u, v) , $u \neq v$, una arista que sumaremos a $\Upsilon(k)$, esta puede colocarse sobre una arista, e , con multiplicidad $1, 2, \dots, k$. Si $(u, v) \notin E(k)$ se crea una arista y convendremos en decir que se colocará sobre una arista, e , con multiplicidad cero.

m_e	1	2	3, ..., p	$\geq p + 1$
0	0	$1 - p$	$\frac{1}{2} - \frac{p}{2}$	$-\frac{p}{2}$
1	$p - 1$	0	$\frac{p}{2} - \frac{1}{2}$	$\frac{p}{2} - 1$
2, ..., p - 1	$\frac{p}{2} - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{p}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
p	$\frac{p}{2}$	$1 - \frac{p}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\geq p + 1$	$\frac{p}{2}$	$1 - \frac{p}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Tabla 1.1: Valores de $\gamma[\Upsilon(k) - e + (u, v)] - \gamma(\Upsilon(k))$, $u \neq v$.

m_e	1	2	3, ..., p	$\geq p + 1$
0, ..., q - 1	$\frac{p}{2} - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{p}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
$\geq q$	$\frac{p}{2}$	$1 - \frac{p}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabla 1.2: Valores de $\gamma[\Upsilon(k) - e + (u, u)] - \gamma(\Upsilon(k))$.

Entonces

$$\gamma[\Upsilon(k) + (u, v)] = \begin{cases} \gamma[\Upsilon(k)] + \frac{1}{2}(1 - p) & m_e = 0 \\ \gamma[\Upsilon(k)] - \frac{1}{2}(1 - p) & m_e = 1 \\ \gamma[\Upsilon(k)] & 2 \leq m_e \leq p - 1 \\ \gamma[\Upsilon(k)] + \frac{1}{2} & m_e \geq p \end{cases}$$

Si la arista que se sumará es un lazo de la forma (u, u) y lo colocamos en uno de multiplicidad m_e , i.e.,

$$\gamma[\Upsilon(k) + (u, u)] = \begin{cases} \gamma[\Upsilon(k)] & 0 \leq m_e \leq q - 1 \\ \gamma[\Upsilon(k)] + \frac{1}{2} & m_e \geq q \end{cases}$$

Si hacemos la operación de restar arista y después sumar arista obtenemos un *reacomodo* de arista en la gráfica $\Upsilon(k)$. Si el reacomodo es de una arista a otra arista, los valores de $\gamma[\Upsilon(k) - e + (u, v)]$, $u \neq v$ se pueden ver en la Tabla 1.1

Si el reacomodo es de una arista a un lazo, los valores de $\gamma[\Upsilon(k) - e + (u, u)]$ se muestran en la Tabla 1.2. Si el reacomodo es de un lazo a otro lazo, los valores de $\gamma[\Upsilon(k) - (u, u) + (v, v)]$ están en la Tabla 1.3.

Si el reacomodo es de un lazo a una arista, los valores $\gamma[\Upsilon(k) - (u, u) + e]$ están en la Tabla 1.4.

1.3.4 Cotas superiores para γ

Introduciremos el concepto de peores gráficas con el fin de simplificar la obtención de cotas para los valores de $\gamma(G(\mathbf{i}))$.

Para $k \geq 1$ y $1 \leq m \leq k$, consideremos gráficas $G(\mathbf{i}) \in \Lambda_{k,m}$.

m_e	1 a q	$q + 1$	$\geq q + 1$
0	$\frac{1}{2} - \frac{q}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{q}{2}$
$1 \leq m_e \leq q - 1$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
q	$\frac{1}{2}$	0	0
$\geq q + 1$	$\frac{1}{2}$	0	0

Tabla 1.3: Valores de $\gamma[\Upsilon(k) - (u, u) + (v, v)] - \gamma(\Upsilon(k))$.

m_e	1 a q	$q + 1$	$< q + 1$
0	$\frac{1}{2} - \frac{p}{2}$	$-\frac{p}{2}$	$-\frac{p}{2}$
1	$-\frac{1}{2} + \frac{p}{2}$	$1 + \frac{p}{2}$	$-1 + \frac{p}{2}$
$2 \leq m_e \leq p - 1$	0	$\frac{-1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\geq p$	$\frac{1}{2}$	0	0

Tabla 1.4: Valores de $\gamma[\Upsilon(k) - (u, u) + e] - \gamma(\Upsilon(k))$.

Llamaremos *peor gráfica* a una gráfica \hat{G} tal que $\gamma(\hat{G}) \geq \gamma(G(\mathbf{i}))$, $\forall G(\mathbf{i}) \in \Lambda_{k,m}$.

Si $m = 1$, $\Lambda_{k,1}$ tiene N elementos, las gráficas de $\Lambda_{k,1}$ son de la forma $G = (\{\mathbf{i}\}, E)$, $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_1)$ con $Q(G(\mathbf{i})) = E\bar{a}_{11}^k$, aquí $\gamma(i) = \frac{1}{2}(k - q)$, $k > q$.

Para k par y $2 \leq m \leq \frac{k}{2}$, la peor gráfica para estos valores de m y k es \hat{G}_I , una gráfica con una arista de multiplicidad $k - 2m + 4$ y $m - 2$ aristas de multiplicidad 2.

Lema 30 Si $G(\mathbf{i}) \in \Lambda_{k,m}$, con $2 \leq m \leq \frac{k}{2}$, entonces

$$\gamma(G(\mathbf{i})) \leq \hat{\gamma}_I := \frac{k}{2} - m + 2 - \frac{p}{2}. \tag{1.14}$$

Para k impar y $2 \leq m \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$, la peor gráfica para estos valores de m y k es \hat{G}_{II} , una gráfica con una arista de multiplicidad $k - 2m + 4$ y $m - 2$ aristas de multiplicidad 2.

Lema 31 Si $G(\mathbf{i}) \in \Lambda_{k,m}$, con k impar y $2 \leq m \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$, entonces

$$\gamma(G(\mathbf{i})) \leq \hat{\gamma}_{II} := \frac{k}{2} - m + 2 - \frac{p}{2}. \tag{1.15}$$

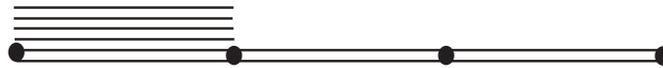


Figura 1.15: Peor gráfica \hat{G}_I con $m = 4$ y $k = 10$.


 Figura 1.16: Gráfica \hat{G}_{III} con $m = 6$ y $k = 8$.

 Figura 1.17: Gráfica \hat{G}_{IV} 4 con $m = 6$ y $k = 10$.

Para $m = \frac{k}{2} + t$, $2 \leq t \leq \frac{k}{2}$ y k par, la peor gráfica para estos valores de m y k es \hat{G}_{III} , la gráfica con $2t$ aristas simples y $m - 2t = \frac{k}{2} - t$ aristas dobles.

Lema 32 Si $G(\mathbf{i}) \in \Lambda_{k,m}$, con k par y $m = \frac{k}{2} + t$, $t \geq 2$ se cumple que

$$\gamma(G(\mathbf{i})) \leq \hat{\gamma}_{III} := (1-p)t. \quad (1.16)$$

Lema 33 Si $G(\mathbf{i}) \in \Lambda_{k,m}$ con k impar y $m = \lceil \frac{k}{2} \rceil + t$, $t \geq 2$ se cumple que

$$\gamma(G(\mathbf{i})) \leq \hat{\gamma}_{IV} := \frac{1}{2}(1-p)(2t-1). \quad (1.17)$$

Sea $m = 1 + \frac{k}{2}$ y $|\tilde{E}| > \frac{k}{2}$ la peor gráfica para estos valores es \hat{G}_V , la gráfica con 3 aristas simples, una arista triple y $\frac{k}{2} - 3$ aristas dobles.

Lema 34 Si $G(\mathbf{i}) \in \Lambda_{k,m}$, con k par y $m = 1 + \frac{k}{2}$, $|E| > \frac{k}{2}$ se cumple que

$$\gamma(G(\mathbf{i})) \leq \hat{\gamma}_V := \frac{3(1-p)}{2}. \quad (1.18)$$

Capítulo 2

El Teorema de Wigner

Sea A_N una matriz de Wigner real $N \times N$ con componentes a_{ij} definidas en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) donde Ω es el espacio muestral y P es la medida de probabilidad definida sobre la σ -álgebra de eventos \mathcal{F} .

Los supuestos sobre las componentes de la matriz aleatoria A_N son los siguientes:

Sean G y H funciones de distribución reales.

1. $a_{11} \sim G$ y $E|a_{11}|^{4+\tau} < \infty, 0 < \tau < 1$.
2. $a_{12} \sim H, Ea_{12} = 0, Ea_{12}^2 = 1$ y $E|a_{12}|^{6+\varepsilon} < \infty, 0 < \varepsilon < 1$.
3. $a_{ij} = a_{ji}$ si $1 \leq i < j \leq N$.
4. $a_{ij} \stackrel{D}{=} a_{12}$ si $1 \leq i < j \leq N$.
5. $a_{ii} \stackrel{D}{=} a_{11}$ si $1 \leq i \leq N$.
6. a_{ij} son *v.a.i.i.d.* si $1 \leq i \leq j \leq N$.

Consideremos la matriz

$$B_N = \frac{1}{\sqrt{N}}A_N.$$

Teorema 35 (Teorema de Wigner) Sean G y H funciones de distribución. Si $a_{11} \sim G, Ea_{11}^2 < \infty, Ea_{12} = 0, Ea_{12}^2 = 1$ y $Ea_{12}^4 < \infty$, entonces la FDEE, F^{B_N} dada en (1.2), cumple que

$$F^{B_N}(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p} F(x),$$

Si además, $E|a_{11}|^{4+\tau} < \infty, 0 < \tau < 1$ y $E|a_{12}|^{6+\varepsilon} < \infty, 0 < \varepsilon < 1$, entonces

$$F^{B_N}(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{c.s.} F(x),$$

donde $F(x)$ es la función de distribución del semicírculo dada en (1.1).

2.1 Demostración del Teorema de Wigner

Primero aplicaremos el Lema 1 a la FDEE $F^{\bar{B}_N}$ de las matrices aleatorias truncadas. Para esto probaremos que $\bar{M}_{k,N}$ dado en (1.9), cumple

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(\bar{M}_{k,N}) = \begin{cases} C_{\frac{k}{2}}, & \text{si } k \text{ es par,} \\ 0, & \text{si } k \text{ es impar,} \end{cases} \quad (2.1)$$

y que

$$\sum_{N=1}^{\infty} \text{Var}(\bar{M}_{k,N}) < \infty. \quad (2.2)$$

con (2.1) y (2.2) se condición (ii) del Lema 1 casi seguramente y debido a que se cumplen (i) y (iii), con $H(x) = F(x)$, de Lema 1 concluimos que

$$F^{\bar{B}_N}(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{c.s.} F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por último, para el caso de las matrices aleatorias originales, en la Sección (2.1.3) se demuestra que $\sum_{N=1}^{\infty} P[|M_{k,N} - E(\bar{M}_{k,N})| > \varepsilon] < \infty$, lo que prueba que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M_{k,N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{M}_{k,N} \quad c.s.$$

es decir,

$$M_{k,N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{c.s.} \begin{cases} C_{\frac{k}{2}}, & \text{si } k \text{ es par,} \\ 0, & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

En consecuencia tenemos la condición (ii) del Lema 1 casi seguramente, por lo tanto se obtiene que

$$F^{B_N}(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{c.s.} F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

lo cual es el objetivo de esta tesis.

2.1.1 Convergencia en esperanza de $\bar{M}_{k,N}$

Descomponemos $E(\bar{M}_{k,N})$ dada en la ecuación (1.9) de la siguiente manera

$$E(\bar{M}_{k,N}) = \sum_{m=1}^k S_{m,k,N},$$

donde

$$S_{m,k,N} = \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{\substack{G(\mathbf{i}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i}))|=m}} Q(G(\mathbf{i})),$$

y $Q(G(\mathbf{i}))$ está dada por (1.10) y (1.11).

Observemos lo siguiente

$$|S_{m,k,N}| \leq \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{\substack{G(\mathbf{i}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i}))|=m}} |Q(G(\mathbf{i}))|$$

de (1.13) obtenemos que

$$\begin{aligned} |S_{m,k,N}| &\leq \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{\substack{G(\mathbf{i}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i}))|=m}} T_{k,m} N^{\hat{\gamma}_{k,m}} \\ &= \frac{T_{k,m} N^{\hat{\gamma}_{k,m}}}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{\substack{G(\mathbf{i}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i}))|=m}} 1 \\ &= \frac{T_{k,m} N^{\hat{\gamma}_{k,m}}}{N^{1+\frac{k}{2}}} C_{k,m} P_m^N. \end{aligned}$$

donde $\hat{\gamma}_{k,m}$ representa la cota superior de las $\gamma(G(\mathbf{i}))$, con $G(\mathbf{i}) \in \Lambda_{k,m}$. Los términos que no dependen de N de esta relación son $C_{k,m}$ y $T_{k,m}$. A continuación analizaremos el límite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |S_{m,k,N}| \leq C_{k,m} T_{k,m} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^{\hat{\gamma}_{k,m}} P_m^N}{N^{1+\frac{k}{2}}},$$

en virtud de que de que el $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P_m^N}{N^m} = 1$ tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |S_{m,k,N}| \leq C_{k,m} T_{k,m} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^{\hat{\gamma}_{k,m}} N^m}{N^{1+\frac{k}{2}}} = C_{k,m} T_{k,m} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{m+\hat{\gamma}_{k,m}-1-\frac{k}{2}}. \quad (2.3)$$

Calcularemos los límites de $S_{m,k,N}$ cuando N tiende a infinito tomando en cuenta la paridad de k y distintos casos para m .

Caso 1: k impar.

Subcaso 1.1 $m = 1$.

Si $m = 1$ y $k \leq q$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |S_{m,k,N}| \leq \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{i_1=1}^N E |a_{i_1 i_1}|^k = \frac{E |a_{11}|^k}{N^{\frac{k}{2}}} \rightarrow 0.$$

Si $m = 1$ y $k > q$, entonces sólo se tiene una gráfica $\Gamma_{k,1}$ -canónica en $\Lambda_{k,1}$ y $\gamma_{k,1} = \frac{k-q}{2}$, de aquí que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |S_{1,k,N}| \leq T_{k,1} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{1+\frac{k-q}{2}-1-\frac{k}{2}} = T_{k,1} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-\frac{1}{2}q} = 0, \quad q > 0,$$

ya que $T_{k,1} = E \bar{a}_{11}^k < \infty$.

Subcaso 1.2 $2 \leq m \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$

Tenemos por el Lema 31 que cualquier gráfica $G(\mathbf{i}) \in \Lambda_{k,m}$ con estos valores de m y k , $\hat{\gamma}_{k,m} = \hat{\gamma}_{II} = \frac{k}{2} - m + 2 - \frac{p}{2}$, por lo que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |S_{m,k,N}| \leq C_{k,m} T_{k,m} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{m + \frac{k}{2} - m + 2 - \frac{p}{2} - 1 - \frac{k}{2}} = C_{k,m} T_{k,m} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{1 - \frac{1}{2}p} = 0, \quad p > 2$$

Subcaso 1.3 $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2 \leq m \leq k$,

Para $m = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + t$ con $2 \leq t \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$ tenemos por el Lema 33 que $\hat{\gamma}_{k,m} = \hat{\gamma}_{IV} = \frac{1}{2}(1-p)(2t-1)$ para toda gráfica $G(\mathbf{i})$ con estos valores de m y k por lo que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} |S_{m,k,N}| &\leq C_{k,m} T_{k,m} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + t + \frac{1}{2}(1-p)(2t-1) - 1 - \frac{k}{2}} = C_{k,m} T_{k,m} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{\frac{1}{2}p + 2t - pt - 2} \\ &= C_{k,m} T_{k,m} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{\frac{1}{2}(p-4) + t(2-p)} \\ &= 0, \quad t \geq 2, p \geq 4. \end{aligned}$$

Caso 2: k par

Subcaso 2.1 $m = 1$. Similar al subcaso 1.1.

Subcaso 2.2 $2 \leq m \leq \frac{k}{2}$

El Lema 30 nos dice que $\hat{\gamma}_{k,m} = \hat{\gamma}_I = \frac{k}{2} - m + 2 - \frac{p}{2}$ por lo que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |S_{m,k,N}| \leq C_{k,m} T_{k,m} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{m + \frac{k}{2} - m + 2 - \frac{p}{2} - 1 - \frac{k}{2}} = C_{k,m} T_{k,m} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{1 - \frac{1}{2}p} = 0, \quad p > 2$$

Subcaso 2.3 $\frac{k}{2} + 2 \leq m \leq k$,

Para $m = \frac{k}{2} + t$, con $2 \leq t \leq \frac{k}{2}$, tenemos por el Lema 32 que $\hat{\gamma}_{k,m} = \hat{\gamma}_{III} = (1-p)t$, de donde tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} |S_{m,k,N}| &\leq C_{k,m} T_{k,m} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{m + \hat{\gamma}_{k,m} - 1 - \frac{k}{2}} = C_{k,m} T_{k,m} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{\frac{k}{2} + t + (1-p)t - 1 - \frac{k}{2}} \\ &= C_{k,m} T_{k,m} \lim_{N \rightarrow \infty} N^{(2-p)t - 1} = 0, \quad t, p \geq 2. \end{aligned}$$

Subcaso 2.4

$m = 1 + \frac{k}{2}$.

En este último caso

$$\begin{aligned} S_{1+\frac{k}{2},k,N} &= \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{\substack{G(\mathbf{i}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i}))|=1+\frac{k}{2}}} Q(G(\mathbf{i})) \\ &= \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{\substack{G(\mathbf{i}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i}))|=1+\frac{k}{2} \\ |\hat{E}(G(\mathbf{i}))|=\frac{k}{2}}} Q(G(\mathbf{i})) + \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{\substack{G(\mathbf{i}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i}))|=1+\frac{k}{2} \\ |\hat{E}(G(\mathbf{i}))|>\frac{k}{2}}} Q(G(\mathbf{i})) \\ &= \check{S}_{1+\frac{k}{2},k,N} + \check{S}'_{1+\frac{k}{2},k,N} \end{aligned}$$

En la primera sumatoria se cuentan las gráficas con k aristas cuyo esqueleto tiene $\frac{k}{2}$ aristas, estos son los árboles los cuales sabemos están dados por $C_{\frac{k}{2}}$, de esto tenemos que

$$\begin{aligned} \check{S}_{1+\frac{k}{2},k,N} &= \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{\substack{G(\mathbf{i}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i}))|=1+\frac{k}{2} \\ |\tilde{E}(G(\mathbf{i}))|=\frac{k}{2}}} Q(G(\mathbf{i})) \\ &= \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{\substack{G(\mathbf{i}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i}))|=1+\frac{k}{2} \\ |\tilde{E}(G(\mathbf{i}))|=\frac{k}{2}}} (E\bar{a}_{12}^2)^{\frac{k}{2}} = \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} C_{\frac{k}{2}} P_{1+\frac{k}{2}}^N (E\bar{a}_{12}^2)^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

del hecho de que $(E\bar{a}_{12}^2)^{\frac{k}{2}} = 1$ y de que el $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{1+\frac{k}{2}}^N / N^{1+\frac{k}{2}} = 1$, se sigue que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \check{S}_{1+\frac{k}{2},k,N} = C_{\frac{k}{2}}.$$

Ahora, si $|\tilde{E}(G(\mathbf{i}))| > \frac{k}{2}$ por el Lema 34 se tiene que $\hat{\gamma}_{k,m} = \hat{\gamma}_V = \frac{3(1-p)}{2}$

$$\begin{aligned} \left| \check{S}_{1+\frac{k}{2},k,N} \right| &= \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{\substack{G(\mathbf{i}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i}))|=1+\frac{k}{2} \\ |\tilde{E}(G(\mathbf{i}))|=\frac{k}{2}}} |Q(G(\mathbf{i}))| \leq \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} T_{k,1+\frac{k}{2}} C_{k,1+\frac{k}{2}} P_{1+\frac{k}{2}}^N N^{\hat{\gamma}_V} \\ &\leq \frac{1}{N^{1+\frac{k}{2}}} T_{k,1+\frac{k}{2}} C_{k,1+\frac{k}{2}} N^{\frac{3(1-p)}{2}} N^{1+\frac{k}{2}} \\ &= T_{k,1+\frac{k}{2}} C_{k,1+\frac{k}{2}} N^{\frac{3(1-p)}{2}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad p > 1. \end{aligned}$$

Así

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \check{S}_{1+\frac{k}{2},k,N} \right| = 0, \quad p > 1.$$

En consecuencia

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{1+\frac{k}{2},k,N} = C_{k/2}.$$

En resumen hemos probado que para $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq k$ se cumple

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{m,k,N} = \begin{cases} C_{\frac{k}{2}}, & \text{si } m = 1 + \frac{k}{2}, k \text{ par,} \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto la esperanza de $E(\bar{M}_{k,N}) = \sum_{m=1}^k S_{m,k,N}$ se simplifica en

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(\bar{M}_{k,N}) = \begin{cases} C_{\frac{k}{2}}, & \text{si } k \text{ par,} \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (2.4)$$

2.1.2 Convergencia casi segura de $\bar{M}_{k,N}$

En esta sección probaremos que

$$\sum_{N=1}^{\infty} \text{Var} (\bar{M}_{k,N}) < \infty,$$

Para esto observemos que

$$\begin{aligned} \text{Var} (\bar{M}_{k,N}) &= \frac{1}{N^{k+2}} \text{Var} \left(\sum_{G(\mathbf{i})} \bar{a}_{i_1 i_2} \dots \bar{a}_{i_k i_1} \right) \\ &= \frac{1}{N^{k+2}} E \left(\sum_{G(\mathbf{i})} \bar{a}_{i_1 i_2} \dots \bar{a}_{i_k i_1} - \left[\sum_{G(\mathbf{i})} E (\bar{a}_{i_1 i_2} \dots \bar{a}_{i_k i_1}) \right] \right)^2 \\ &= \frac{1}{N^{k+2}} E \left(\sum_{G(\mathbf{i})} \bar{a}_{i_1 i_2} \dots \bar{a}_{i_k i_1} - \sum_{G(\mathbf{i})} Q(G(\mathbf{i})) \right)^2 \end{aligned}$$

desarrollando el binomio al cuadrado, llegamos a que

$$\begin{aligned} \text{Var} (\bar{M}_{k,N}) &= \frac{1}{N^{k+2}} E \left[\sum_{G(\mathbf{i})} \sum_{G(\mathbf{j})} \bar{a}_{i_1 i_2} \dots \bar{a}_{i_k i_1} \bar{a}_{j_1 j_2} \dots \bar{a}_{j_k j_1} \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{G(\mathbf{i})} \bar{a}_{i_1 i_2} \dots \bar{a}_{i_k i_1} \sum_{G(\mathbf{j})} Q(G(\mathbf{j})) + \sum_{G(\mathbf{i})} \sum_{G(\mathbf{j})} Q(G(\mathbf{i})) Q(G(\mathbf{j})) \right], \end{aligned}$$

dato que $\sum_{G(\mathbf{i})} \bar{a}_{i_1 i_2} \dots \bar{a}_{i_k i_1} \sum_{G(\mathbf{j})} Q(G(\mathbf{j})) = \sum_{G(\mathbf{i})} \sum_{G(\mathbf{j})} Q(G(\mathbf{i})) Q(G(\mathbf{j}))$ y haciendo $Q(G(\mathbf{i}, \mathbf{j})) = \bar{a}_{i_1 i_2} \dots \bar{a}_{i_k i_1} \bar{a}_{j_1 j_2} \dots \bar{a}_{j_k j_1}$ se sigue que

$$\begin{aligned} \text{Var} (\bar{M}_{k,N}) &= \frac{1}{N^{k+2}} \left[\sum_{G(\mathbf{i}), G(\mathbf{j})} Q(G(\mathbf{i}, \mathbf{j})) - 2 \sum_{G(\mathbf{i})} Q(G(\mathbf{i})) \sum_{G(\mathbf{j})} Q(G(\mathbf{j})) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{G(\mathbf{i}), G(\mathbf{j})} Q(G(\mathbf{i})) Q(G(\mathbf{j})) \right] \\ &= \frac{1}{N^{k+2}} \sum_{G(\mathbf{i}), G(\mathbf{j})} [Q(G(\mathbf{i}, \mathbf{j})) - Q(G(\mathbf{i})) Q(G(\mathbf{j}))]. \end{aligned}$$

Descompondremos $\text{Var} (\bar{M}_{k,N})$ como sigue

$$\text{Var} (\bar{M}_{k,N}) = \sum_{m=1}^{2k} S_{m,2k,N}$$

donde

$$\begin{aligned}
 S_{m,2k,N} &= \frac{1}{N^{k+2}} \sum_{\substack{G(\mathbf{i},\mathbf{j}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i},\mathbf{j}))|=m}} [Q(G(\mathbf{i}), G(\mathbf{j})) - Q(G(\mathbf{i}))Q(G(\mathbf{j}))] \\
 &= \frac{1}{N^{k+2}} \sum_{m_1, m_2=1}^m \sum_{\substack{G(\mathbf{i},\mathbf{j}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i}))|=m_1 \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{j}))|=m_2 \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i},\mathbf{j}))|=m}} [Q(G(\mathbf{i}), G(\mathbf{j})) - Q(G(\mathbf{i}))Q(G(\mathbf{j}))]
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Lema 36 Si $\tilde{V}(G(\mathbf{i})) = m_1$, $\tilde{V}(G(\mathbf{j})) = m_2$, $\tilde{V}(G(\mathbf{i}), G(\mathbf{j})) = m$ donde $m_1 + m_2 = m$ entonces $\tilde{V}(G(\mathbf{i})) \cap \tilde{V}(G(\mathbf{j})) = \emptyset$, es decir $G(\mathbf{i})$ y $G(\mathbf{j})$ no tienen vértices comunes.

Lema 37 Si $G(\mathbf{i})$ y $G(\mathbf{j})$ no tienen aristas en común entonces

$$Q(G(\mathbf{i}, \mathbf{j})) = Q(G(\mathbf{i}))Q(G(\mathbf{j})).$$

En virtud del Lema 37 podemos expresar a $S_{m,2k,N}$ como

$$S_{m,2k,N} = \frac{1}{N^{k+2}} \sum_{\substack{m_1, m_2=1 \\ m_1+m_2 \neq m}}^m \sum_{\substack{G(\mathbf{i},\mathbf{j}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i}))|=m_1 \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{j}))|=m_2 \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i},\mathbf{j}))|=m}} [Q(G(\mathbf{i}), G(\mathbf{j})) - Q(G(\mathbf{i}))Q(G(\mathbf{j}))]. \tag{2.6}$$

Separaremos $S_{m,2k,N}$ como sigue

$$S_{m,2k,N} = S'_{m,2k,N} + S''_{m,2k,N}$$

donde

$$S'_{m,2k,N} = \frac{1}{N^{k+2}} \sum_{\substack{G(\mathbf{i},\mathbf{j}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i},\mathbf{j}))|=m}} Q(G(\mathbf{i}), G(\mathbf{j}))$$

y

$$S''_{m,2k,N} = \frac{1}{N^{k+2}} \sum_{m_1, m_2=1}^m \sum_{\substack{G(\mathbf{i},\mathbf{j}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i}))|=m_1 \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{j}))|=m_2 \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i},\mathbf{j}))|=m}} Q(G(\mathbf{i}))Q(G(\mathbf{j})). \tag{2.7}$$

Probaremos que $S'_{m,2k,N} = O(N^{-2})$ $m = 1, \dots, 2k$, y $S''_{m,2k,N} = O(N^{-2})$, $1 \leq m \leq 2k$, $m \neq k+2$.

Podemos calcular cotas para $S'_{m,2k,N}$ de la siguiente manera

$$|S'_{m,2k,N}| \leq \frac{1}{N^{k+2}} \sum_{\substack{G(\mathbf{i},\mathbf{j}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i},\mathbf{j}))|=m}} |Q(G(\mathbf{i},\mathbf{j}))|$$

de 1.13 tenemos que $|Q(G(\mathbf{i},\mathbf{j}))| \leq T_{2k,m} N^{\hat{\gamma}_{2k,m}}$

$$\begin{aligned} |S'_{m,2k,N}| &\leq \frac{1}{N^{k+2}} \sum_{\substack{G(\mathbf{i},\mathbf{j}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i},\mathbf{j}))|=m}} T_{2k,m} N^{\hat{\gamma}_{2k,m}} \\ &\leq \frac{T_{2k,m} N^{\hat{\gamma}_{2k,m}}}{N^{k+2}} \sum_{\substack{G(\mathbf{i},\mathbf{j}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i},\mathbf{j}))|=m}} 1 \end{aligned}$$

de la Proposición 20 obtenemos que

$$|S'_{m,2k,N}| \leq \frac{T_{2k,m} N^{\hat{\gamma}_{2k,m}}}{N^{k+2}} C_{2k,m} P_m^N \leq \frac{T_{2k,m}}{N^{k+2}} C_{2k,m} N^{\hat{\gamma}_{2k,m} + m} \quad (2.8)$$

Analicemos ahora esta sumatoria por casos.

Si $m = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} S'_{1,2k,N} &= \frac{1}{N^{k+2}} \sum_{i=1}^N E(\bar{a}_{11}^k \bar{a}_{11}^k) = \frac{1}{N^{k+2}} \sum_{i=1}^N E(\bar{a}_{11}^{2k}) = \frac{N}{N^{k+2}} E \bar{a}_{11}^{2k} \\ &= \frac{1}{N^{k+1}} N^{\frac{2k-q}{2}} \left[N^{\frac{q-2k}{2}} E \bar{a}_{11}^{2k} \right] = \frac{1}{N^{1+\frac{q}{2}}} T_1 = O(N^{-2}), \quad q \geq 2 \end{aligned}$$

Para $2 \leq m \leq \frac{k}{2}$.

Tomamos la peor gráfica \hat{G}_I con m vértices y $2k$ aristas del Lema 30, tenemos que para estos valores de m y k $\hat{\gamma}_{2k,m} = \hat{\gamma}_I = \frac{2k-2m+4-p}{2}$, así de (2.8) tenemos que

$$\begin{aligned} |S'_{m,2k,N}| &\leq \frac{T_{2k,m}}{N^{k+2}} C_{2k,m} N^{\hat{\gamma}_I + m} = \frac{T_{2k,m}}{N^{k+2}} C_{2k,m} N^{k-m-\frac{1}{2}p+2+m} = T_{2k,m} C_{2k,m} N^{-\frac{1}{2}p} \\ &= O(N^{-2}), \quad p \geq 4. \end{aligned}$$

Para $m = k + t$, $t \geq 2$.

Tomando ahora la peor gráfica \hat{G}_{II} dada en el Lema 32 con m vértices y $2k$ aristas tenemos que $\hat{\gamma}_{2k,m} = \hat{\gamma}_{II} = (1-p)t$, así de 2.8 obtenemos que

$$\begin{aligned} |S'_{m,2k,N}| &\leq \frac{T_{2k,m}}{N^{k+2}} C_{2k,m} N^{\hat{\gamma}_{II} + m} = \frac{T_{2k,m}}{N^{k+2}} C_{2k,m} N^{(1-p)t+k+t} \\ &= T_{2k,m} C_{2k,m} N^{-2+t(2-p)} = O(N^{-2}), \quad p \geq 2. \end{aligned}$$

De todos los casos anteriores podemos concluir que $S''_{m,2k,N} = O(N^{-2})$.

Para el caso de $S''_{m,2k,N}$ veamos que

$$\begin{aligned}
 |S''_{m,2k,N}| &\leq \frac{1}{N^{k+2}} \sum_{m_1, m_2=1}^m \sum_{\substack{G(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i}))|=m_1 \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{j}))|=m_2 \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i}, \mathbf{j}))|=m}} |Q(G(\mathbf{i})) Q(G(\mathbf{j}))| \\
 &\leq \frac{1}{N^{k+2}} \sum_{m_1, m_2=1}^m \sum_{\substack{G(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i}))|=m_1 \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{j}))|=m_2 \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i}, \mathbf{j}))|=m}} T_{k, m_1} N^{\hat{\gamma}_{k, m_1}} T_{k, m_2} N^{\hat{\gamma}_{k, m_2}} \\
 &\leq \frac{1}{N^{k+2}} \sum_{m_1, m_2=1}^m C_{k, m_1} T_{k, m_1} P_{m_1}^N C_{k, m_2} T_{k, m_2} P_{m_2}^N N^{\hat{\gamma}_{k, m_1} + \hat{\gamma}_{k, m_2}}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|S''_{m,2k,N}| \leq \frac{\bar{T}}{N^{k+2}} \sum_{m_1, m_2=1}^m N^{m_1 + m_2 + \hat{\gamma}_{k, m_1} + \hat{\gamma}_{k, m_2}}. \quad (2.9)$$

donde $\bar{T} = \max \{C_{k, m_1} C_{k, m_2} T_{k, m_1} T_{k, m_2} : 1 \leq m_1, m_2 \leq m\}$.

Similarmente al caso de $S'_{m,k,N}$ analizaremos $S''_{m,2k,N}$ por casos para m :

Para $m = 1$, $\gamma_{k,1} = \frac{1}{2}(k - q)$

$$|S''_{m,2k,N}| \leq \frac{\bar{T}}{N^{k+2}} N^{2+(k-q)} = \bar{T} N^{-q} = O(N^{-2}), \quad q \geq 2.$$

Para k par y los distintos valores posibles de m_1 y m_2 , tenemos que los valores de $N^{m_1 + m_2 + \hat{\gamma}_{k, m_1} + \hat{\gamma}_{k, m_2} - 2 - k}$ se muestran en las siguientes tablas:

$$\begin{array}{c}
 2 \leq t_1, t_2 \leq \frac{k}{2} \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 m_2 \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \leq m_2 \leq \frac{k}{2} \\
 \frac{k}{2} + 1 \\
 \frac{k}{2} + t_1
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \leq m_1 \leq \frac{k}{2} \\
 \frac{k}{2} + 1 \\
 \frac{k}{2} + t_1
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \leq m_2 \leq \frac{k}{2} \\
 \frac{k}{2} + 1 \\
 \frac{k}{2} + t_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \leq m_1 \leq \frac{k}{2} \\
 \frac{k}{2} + 1 \\
 \frac{k}{2} + t_1
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 N^{-q} \\
 N^{1-\frac{1}{2}(p+q)} \\
 N^{-\frac{q}{2}} \\
 N^{-t_1(p-2)+1-\frac{q}{2}} \\
 N^{-\frac{1}{2}(p+q)} \\
 N^{-(p-2)} \\
 N^{1-\frac{p}{2}} \\
 N^{-\frac{p}{2}-t_1(p-2)} \\
 N^{-\frac{q}{2}} \\
 N^{1-\frac{p}{2}} \\
 N^0 \\
 N^{-(p-2)-2} \\
 N^{-\frac{p}{2}-t_2(p-2)} \\
 N^{1-\frac{p}{2}} \\
 N^0 \\
 N^{-(p-2)-2} \\
 N^{-\frac{p}{2}-t_2(p-2)} \\
 N^{-(p-2)-2} \\
 N^{-(p-2)(t_1+t_2)}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (2.10)$$

Para k impar:

$$2 \leq t_1, t_2 \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1$$

		m_2		
		1	$2 \leq m_2 \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1$	$\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + t_2$
m_1	1	N^{-q}	$N^{1-\frac{1}{2}(p+q)}$	$N^{-t_2(p-2)+\frac{1}{2}(p-q)-2}$
	$2 \leq m_2 \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1$	$N^{1-\frac{1}{2}(p+q)}$	N^{2-p}	$N^{-1-t_2(\frac{p}{2}-2)}$
	$\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + t_1$	$N^{-t_1(p-2)+\frac{1}{2}(p-q)-2}$	$N^{-1-t_2(\frac{p}{2}-2)}$	$N^{-(t_1+t_2)(p-2)-p-4}$

Si $p = 4$ y $q = 2$ los valores de las dos tablas anteriores quedan de la siguiente manera:
 k par

$$2 \leq t_1, t_2 \leq \frac{k}{2}$$

		m_2			
		1	$2 \leq m_2 \leq \frac{k}{2}$	$\frac{k}{2} + 1$	$\frac{k}{2} + t_2$
m_1	1	N^{-2}	N^{-2}	N^{-1}	N^{-2t_2}
	$2 \leq m_1 \leq \frac{k}{2}$	N^{-2}	N^{-2}	N^{-1}	N^{-2-2t_2}
	$\frac{k}{2} + 1$	N^{-1}	N^{-1}	N^0	N^{-4}
	$\frac{k}{2} + t_1$	N^{-2t_1}	N^{-2-2t_1}	N^{-4}	$N^{-2(t_1+t_2)}$

k impar

$$2 \leq t_1, t_2 \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1$$

		m_2		
		1	$2 \leq m_2 \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1$	$\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + t_2$
m_1	1	N^{-2}	N^{-2}	N^{-2t_2-1}
	$2 \leq m_2 \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1$	N^{-2}	N^{-2}	N^{-1}
	$\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + t_1$	N^{-2t_1-1}	N^{-1}	$N^{-2(t_1+t_2)}$

por el Lema 41 tenemos que

$$F^{\bar{B}_N}(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p} F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tomando $p = 6$ y $q = 4$, tenemos que los valores de las dos tablas anteriores quedan de la siguiente manera:

k par

$$m_2$$

		m_2			
		1	$2 \leq m_2 \leq \frac{k}{2}$	$m_1 = \frac{k}{2} + 1$	$m_2 = \frac{k}{2} + t_2$
m_1	1	N^{-4}	N^{-4}	N^{-2}	N^{-4t_2-1}
	$2 \leq m_1 \leq \frac{k}{2}$	N^{-4}	N^{-4}	N^{-2}	N^{-3-4t_2}
	$m_1 = \frac{k}{2} + 1$	N^{-2}	N^{-2}	N^0	N^{-6}
	$m_1 = \frac{k}{2} + t_1$	N^{-4t_1-1}	N^{-3-4t_1}	N^{-6}	$N^{-4(t_1+t_2)}$

k impar

m_2				
		1	$2 \leq m_2 \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$	$\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2 \leq m_2 \leq k$
m_1	1	N^{-4}	N^{-4}	N^{-4t_2-1}
	$2 \leq m_2 \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$	N^{-4}	N^{-4}	N^{-1-t_2}
	$\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2 \leq m_2 \leq k$	N^{-4t_1-1}	N^{-1-t_2}	$N^{-4(t_1+t_2)-10}$

Vemos que para todos estos valores de $N^{m_1+m_2+\hat{\gamma}_{k,m_1}+\hat{\gamma}_{k,m_2}-k-2}$, $S''_{m,2k,N} = O(N^{-2})$, excepto para el caso $m = k + 2$. Para este caso tenemos

$$\begin{aligned}
 S''_{k+2,k,N} &= \frac{1}{N^{k+2}} \sum_{\substack{m_1, m_2=1 \\ m_1 \neq \frac{k}{2}+1 \\ m_2 \neq \frac{k}{2}+1}} |Q(G(\mathbf{i})) Q(G(\mathbf{j}))| \frac{1}{N^{k+2}} + \sum_{\substack{m_1=m_2=\frac{k}{2}+1 \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i},\mathbf{j}))|=k+2}} |Q(G(\mathbf{i})) Q(G(\mathbf{j}))| \\
 &\leq O(N^{-2}) + \frac{\bar{T}}{N^{k+2}} \sum_{\substack{|\tilde{V}(G(\mathbf{i}))|=|\tilde{V}(G(\mathbf{j}))|=\frac{k}{2}+1 \\ |\tilde{V}(G(\mathbf{i},\mathbf{j}))|=k+2}} N^{k+2} \\
 &= O(N^{-2}) + \bar{T} P_{\frac{k}{2}+1}^N P_{\frac{k}{2}+1}^N = O(N^{-2}) + O(N^0) = O(N^0).
 \end{aligned}$$

De todos los casos anteriores para $p \geq 6$, $q \geq 4$ podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 S'_{m,2k,N} &= O(N^{-2}) \quad m = 1, \dots, 2k \\
 S''_{m,2k,N} &= O(N^{-2}) \quad \text{si } m \neq k+2.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto de lo anterior y del hecho de que el caso $m_1 = m_2 = \frac{k}{2} + 1$ no ocurre en la suma (2.6) podemos concluir que

$$S_{m,2k,N} = O(N^{-2})$$

esto implica que

$$\text{Var}(\bar{M}_{k,N}) = O(N^{-2}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por lo que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \text{Var}(\bar{M}_{k,N}) = L, \quad \text{para algun } L > 0$$

Además se cumple que

$$\text{Var}(\bar{M}_{k,N}) \leq \frac{L}{N^2}, \quad N \geq N_0 > 0.$$

Así

$$\sum_{N=N_0}^{N_1} \text{Var}(\bar{M}_{k,N}) \leq \sum_{N=N_0}^{N_1} \frac{L}{N^2},$$

lo que implica que

$$\sum_{N=N_0}^{\infty} \text{Var} (\bar{M}_{k,N}) \leq \sum_{N=N_0}^{\infty} \frac{L}{N^2} \leq \frac{\pi^2}{6} L < \infty.$$

Y por último obtenemos que

$$\sum_{N=1}^{\infty} \text{Var} (\bar{M}_{k,N}) < \infty, \quad k \in \mathbb{N}, p \geq 6, q \geq 4. \quad (2.11)$$

En resumen, tenemos de (2.4) que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E (\bar{M}_{k,N}) = \begin{cases} C_{\frac{k}{2}}, & \text{si } k \text{ par,} \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

y por (2.11) aplicando el Lema de Borel-Cantelli concluimos que

$$\bar{M}_{k,N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{c.s.} \begin{cases} C_{\frac{k}{2}}, & \text{si } k \text{ par,} \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Es decir, tenemos la condición (ii) de Lema 1 que era la que faltaba para obtener que

$$F^{\bar{B}_N} (x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{c.s.} F (x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.1.3 Comparación de $M_{k,N}$ y $\bar{M}_{k,N}$

En el siguiente lema vamos a obtener una cota para la probabilidad $P [|M_{k,N} - E(\bar{M}_{k,N})| > \varepsilon]$, $\forall k, N$. Lo cual será de utilidad para probar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M_{k,N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{M}_{k,N} \quad c.s.,$$

lo cual se concluye en la siguiente sección.

Lema 38

$$P [|M_{k,N} - E(\bar{M}_{k,N})| > \varepsilon] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var} [\bar{M}_{k,N}] + \sum_{i < j} P (a_{ij} \neq \bar{a}_{ij}).$$

Deseamos probar que $\sum_{N=1}^{\infty} P [|M_{k,N} - E(\bar{M}_{k,N})| > \varepsilon] < \infty$. Con este fin sea

$$\begin{aligned} p_N & : = \sum_{i < j} P (a_{ij} \neq \bar{a}_{ij}) \\ & = \sum_{i=1}^N P (a_{ii} \neq \bar{a}_{ii}) + \sum_{i < j} P (a_{ij} \neq \bar{a}_{ij}) \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} p_N &= NP(a_{11} \neq \bar{a}_{11}) + \frac{N(N-1)}{2} P(a_{12} \neq \bar{a}_{12}) \\ &= NP(|a_{11}| \geq \sqrt{N}) + \frac{N(N-1)}{2} P(|a_{12}| \geq \sqrt{N}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Lema 39 Sea H una función de distribución. $X \sim H$. Si $EX^p < \infty$, para $p \geq 1$ se cumple que

$$P(|X| \geq \sqrt{N}) \leq \frac{1}{N^{\frac{p}{2}}} \int_{|x| \geq \sqrt{N}} |x|^p H(dx).$$

Usando el Lema 39 en (2.12) tenemos que como $Ea_{11}^2 < \infty$ (i.e., $q = 2$) y $Ea_{12}^4 < \infty$ (i.e. $p = 4$) se sigue que

$$\begin{aligned} p_N &= NP(|a_{11}| \geq \sqrt{N}) + \frac{N(N-1)}{2} P(|a_{12}| \geq \sqrt{N}) \\ &\leq N \left(\frac{1}{N} \int_{|x| \geq \sqrt{N}} x^2 G(dx) \right) + \frac{N(N-1)}{2} \frac{1}{N^2} \int_{|x| \geq \sqrt{N}} x^4 H(dx) \\ &= \int_{|x| \geq \sqrt{N}} x^2 G(dx) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N} \right) \int_{|x| \geq \sqrt{N}} x^4 H(dx) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

este último paso se justifica por el Lema 27.

Y si $E|a_{11}^{4+\tau}| < \infty$ y $E|a_{12}^{6+\varepsilon}| < \infty$ para algún $\tau > 0$ y $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} p_N &\leq N \left(\frac{1}{N^{(4+\tau)/2}} \int_{|x| \geq \sqrt{N}} |x|^{4+\tau} G(dx) \right) + \frac{N(N-1)}{2} \frac{1}{N^{(6+\varepsilon)/2}} \int_{|x| \geq \sqrt{N}} |x|^{6+\varepsilon} H(dx) \\ &\leq \frac{1}{N^{1+\frac{\tau}{2}}} E|a_{11}|^{4+\tau} + \frac{1}{N^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \left(1 - \frac{1}{N} \right) E|a_{12}|^{6+\varepsilon} \\ &\leq \frac{1}{N^{1+\alpha}} T_o < \infty, \quad \text{con } T_o = \max(E|a_{11}|^{4+\tau}, E|a_{12}|^{6+\varepsilon}), \quad \alpha = \min(\varepsilon, \tau) \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\sum_{N=N_1}^{\infty} p_N < \infty. \quad (2.13)$$

2.1.4 Convergencia de la FDEE original

En virtud de que

$$\frac{1}{\varepsilon^2} E [\bar{M}_{k,N} - E(\bar{M}_{k,N})]^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(\bar{M}_{k,N})$$

y por (2.11) tenemos que $\sum_{N=1}^{\infty} \text{Var}(\bar{M}_{k,N}) < \infty$, por lo tanto de (2.13) concluimos que

$$\sum_{N=1}^{\infty} P[|M_{k,N} - E(\bar{M}_{k,N})| > \varepsilon] < \infty.$$

Por lo tanto, por el Lema de Borel-Cantelli se sigue que

$$P \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{N=n}^{\infty} |M_{k,N} - E(\bar{M}_{k,N})| > \varepsilon \right) = 0$$

Lo que implica

$$M_{k,N} - E(\bar{M}_{k,N}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{c.s.} 0,$$

y por la sección anterior

$$E(\bar{M}_{k,N}) - C_{\frac{k}{2}} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0,$$

se sigue que

$$M_{k,N} - C_{\frac{k}{2}} = M_{k,N} - C_{\frac{k}{2}} + C_{\frac{k}{2}} - E(\bar{M}_{k,N}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{c.s.} 0.$$

En consecuencia obtenemos que

$$M_{k,N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{c.s.} \begin{cases} C_{\frac{k}{2}}, & \text{si } k \text{ es par,} \\ 0, & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por lo tanto se tiene la condición (ii) del Lema 1 casi seguramente, lo que nos lleva a concluir que

$$F^{BN}(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{c.s.} F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

y la demostración del Teorema de Wigner queda completa. ■

Capítulo 3

Estudio de simulación

En esta sección se realiza un estudio de simulación con el fin de ilustrar el Teorema de Wigner. El estudio de simulación consiste en generar matrices aleatorias que cumplen las hipótesis del Teorema de Wigner, i.e., se generan matrices $A_N = (a_{ij})$, de dimensión $N \times N$, $N \geq 1$ donde para funciones de distribución G y H , los elementos de A cumplen lo siguiente:

1. $a_{11} \sim G$ y $E|a_{11}|^{4+\tau} < \infty, 0 < \tau < 1$.
2. $a_{12} \sim H, Ea_{12} = 0, Ea_{12}^2 = 1$ y $E|a_{12}|^{6+\varepsilon} < \infty, 0 < \varepsilon < 1$.
3. $a_{ij} = a_{ji}$ si $1 \leq i < j \leq N$.
4. $a_{ij} \stackrel{D}{=} a_{12}$ si $1 \leq i < j \leq N$.
5. $a_{ii} \stackrel{D}{=} a_{11}$ si $1 \leq i \leq N$.
6. a_{ij} v.a.i.i.d. si $1 \leq i \leq j \leq N$.

Con las matrices A_N se elaboran histogramas de los eigenvalores de las matrices aleatorias generadas y se comparan con la función de densidad del semicírculo.

Se estudian tres casos para las matrices aleatorias.

El caso I ilustra la validez del Teorema de Wigner cuando se cumplen sus hipótesis. En el Ejemplo 1 las componentes de las matrices aleatorias son v.a.i.i.d. $N(0, 1)$ por lo que cada componente de la matriz aleatoria tiene momentos de todos los órdenes. El Ejemplo 2 considera matrices aleatorias donde los elementos de la diagonal tienen momentos de orden $4 + \tau, 0 < \tau < 1$ y fuera de la diagonal tienen momentos de orden $6 + \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$. El Ejemplo 3 considera matrices aleatorias donde los elementos de la diagonal tienen momentos de orden $4 + \tau, 0 < \tau < 1$ y fuera de la diagonal tienen momentos de todos los órdenes. En los tres ejemplos anteriores se observó que los histogramas se van aproximando a la distribución semicírculo conforme N va creciendo de 100 a 5000.

El caso II considera situaciones donde fallan las condiciones 1 y 2 con $N = 100, 500$ y 1000. En estas situaciones no se realizó la simulación para $N = 5000$ debido a que las

rutinas de descomposición en valores singulares y de cálculo de eigenvalores presentaron problemas numéricos. Cabe mencionar que en el caso donde se cumplen las hipótesis del Teorema de Wigner sí se pudo trabajar con $N = 5000$ posiblemente debido a que en este caso los eigenvalores están todos alrededor de cero varían de -2 a 2. Los ejemplos 4, 5 y 6 son de matrices aleatorias que no cumplen los supuestos sobre los momentos o sobre la centralidad. El Ejemplo 4 considera matrices aleatorias donde todas las componentes son normales, por lo que tienen momentos de todos los órdenes. Sin embargo fuera de la diagonal no cumple que $Ea_{12} = 0$. El Ejemplo 5 contiene el caso en el que todas las componentes de las matrices aleatorias son v.a.i.i.d. *Cauchy*(0, 1) por lo que ninguna tiene momento de orden finito. El Ejemplo 6 considera matrices aleatorias donde las componentes de la matriz tienen componentes fuera de la diagonal con distribución $N(0, 1)$. Sin embargo la diagonal no cumple que $E|a_{11}| < \infty$. En los tres ejemplos mencionados inmediatos anteriores se observó que los histogramas distan mucho de aproximarse a un semicírculo conforme N va creciendo de 100 a 1000.

El caso III se generó una matriz $\Sigma = (\sigma_{ij})$, donde $\sigma_{ii} = 1$ si $i = 1, \dots, N$ y $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \rho$ si $1 \leq i < j \leq N$, $0 < \rho < 1$. Después se obtuvo la matriz $\Sigma^{1/2}$ y por último con la matriz de Wigner A , con todas sus estradas $N(0, 1)$ se construyó una matriz simétrica $W = \Sigma^{1/2}A\Sigma^{1/2}$ la cual no cumple que sus componentes w_{ij} sean independientes. Se consideraron valores de $\rho = \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$ y $\frac{4}{5}$, con el fin de ilustrar dependencia débil, moderada y fuerte respectivamente. Se observó en los histogramas de los ejemplos 7, 8 y 9 que conforme ρ aumenta la aproximación al histograma de la distribución del semicírculo empeora.

Se utilizaron los siguientes códigos en R para realizar las simulaciones:

Casos I y II:

```
N<-1000
A<-matrix(0,N,N)
for(i in 1:N)A[i,i]<-rdist1(parámetros1)
for(i in 1:(N-1)) for (j in (i+1):N) A[i,j]<-A[j,i]<-rdist2(parámetros2).
lambdas<-eigen(A)$values
hist(lambdas/sqrt(N),probability=T,main="",xlab="Eigenvalores",
ylab="Frecuencias")
sc<-function(x){sqrt(4-x*x)/(2*pi)}
curve(sc(x), col = 2,from=-2,to=2, add = TRUE)
```

Caso III:

```
N<-1000
Sigma<-A<-matrix(0,N,N)
for(i in 1:N) Sigma[i,i]<-1
for(i in 1:(N-1)) for (j in (i+1):N) Sigma[i,j]<-Sigma[j,i]<-rho
svdSigma<-svd(Sigma)
H<-svdSigma$v
DD<-diag(sqrt(svdSigma$d))
sqrSigma<-H%*%DD%*%t(H)
```

```

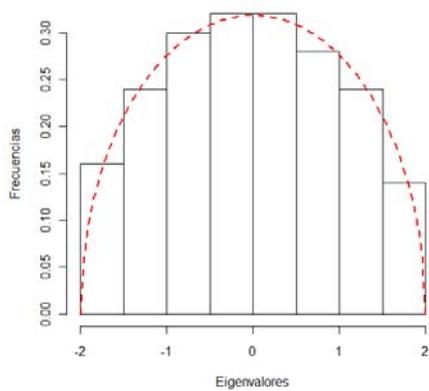
for(i in 1:N) A[i,i]<-rnorm(1)
for(i in 1:(N-1)) for (j in (i+1):N) A[i,j]<-A[j,i]<-rnorm(1)
B<-sqrSigma%%A%%sqrSigma
lambdas<-eigen(B)$values
hist(lambdas/sqrt(N),probability=T,main=" ro=ro, G ~N(0,1), H ~N(0,1),
N=1000",xlab="Eigenvalores",ylab="Frecuencias",nclass=20)
sc<-function(x){sqrt(4-x*x)/(2*pi)}
curve(sc(x), col = 2, lty = 2, lwd = 2, add = TRUE)

```

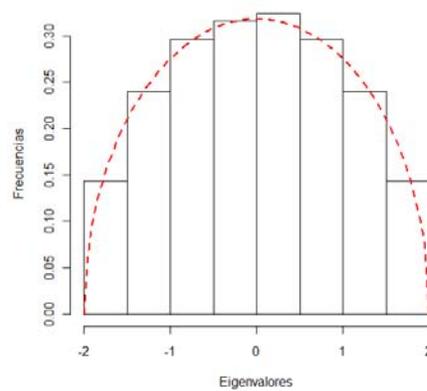
3.1 Ejemplos bajo los supuestos del Teorema de Wigner

Caso I

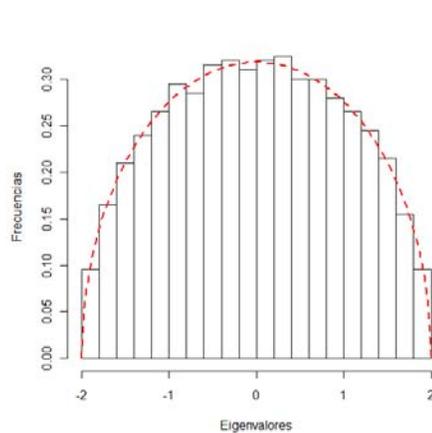
Ejemplo 1: G distribución $N(0, 1)$ y H distribución $N(0, 1)$.



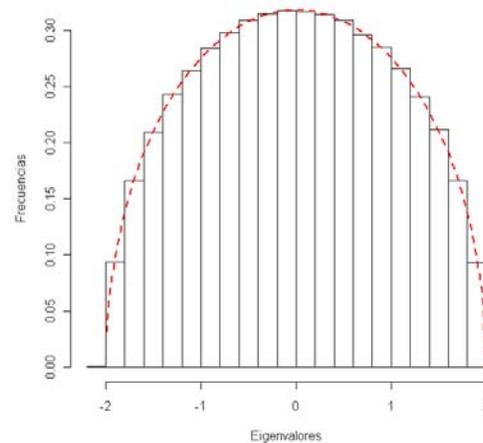
$N = 100.$



$N = 500.$

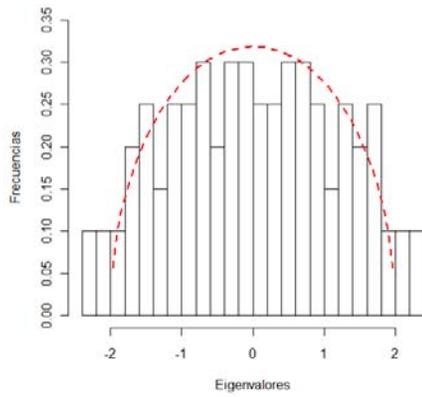


$N = 1000.$

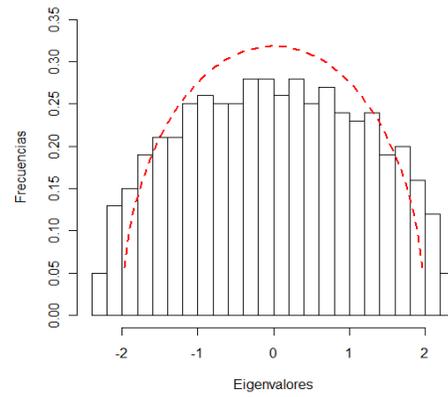


$N = 5000.$

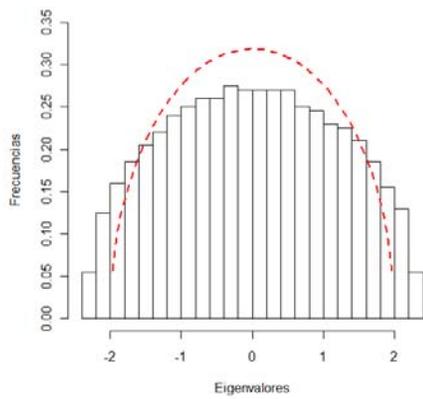
Ejemplo 2: G distribución t -student con 5 grados de libertad y H distribución t -student con 7 grados de libertad.



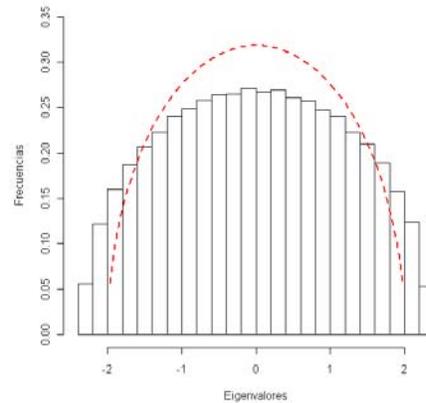
$N = 100.$



$N = 500.$

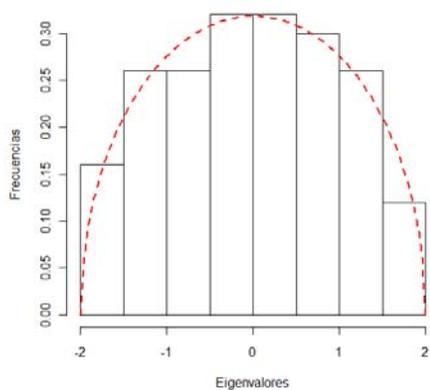


$N = 1000.$

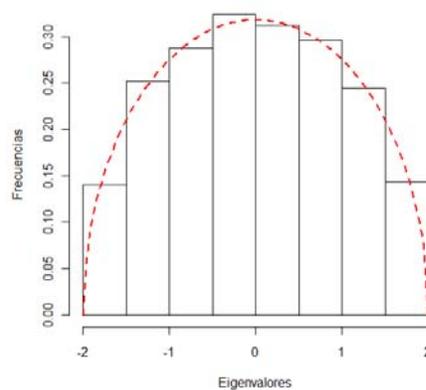


$N = 5000.$

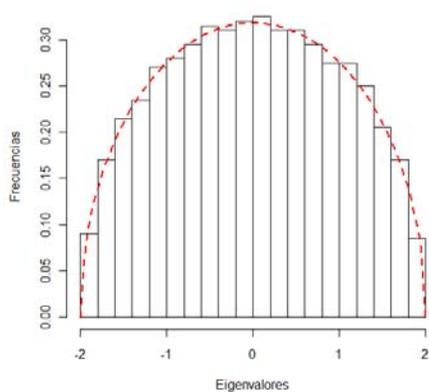
Ejemplo 3. G distribución t -student con 5 grados de libertad y H distribución $N(0, 1)$.



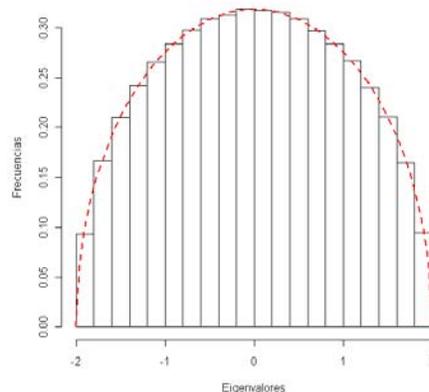
$N = 100.$



$N = 500.$



$N = 1000.$



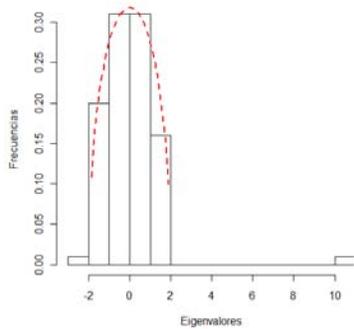
$N = 5000.$

Obsérvese que en los ejemplos 1, 2 y 3 las matrices aleatorias simuladas cumplen las hipótesis del Teorema de Wigner, lo que se confirma de histogramas ya que estos ajustan a la distribución del semicírculo cada vez mejor conforme la dimensión de la matriz aleatoria N va creciendo de 100 a 5000.

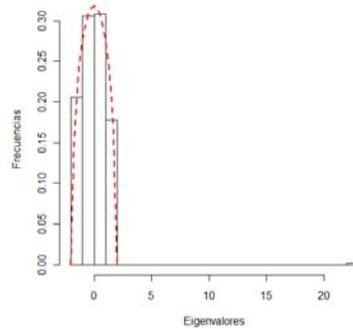
3.2 Ejemplos sin los supuestos del Teorema de Wigner

Caso II

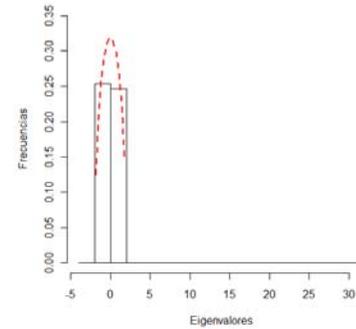
Ejemplo 4. G distribución $N(0, 1)$ y H distribución $N(1, 1)$.



$N = 100.$

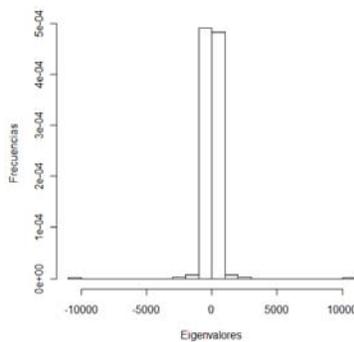


$N = 500.$

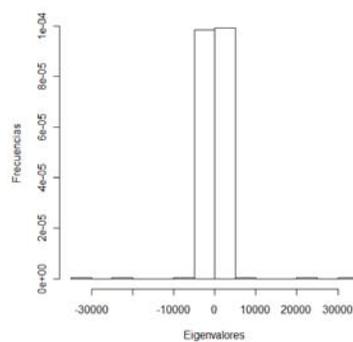


$N = 1000.$

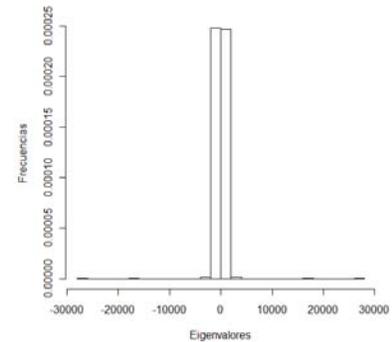
Ejemplo 5. G y H distribuciones Cauchy.



$N = 100.$

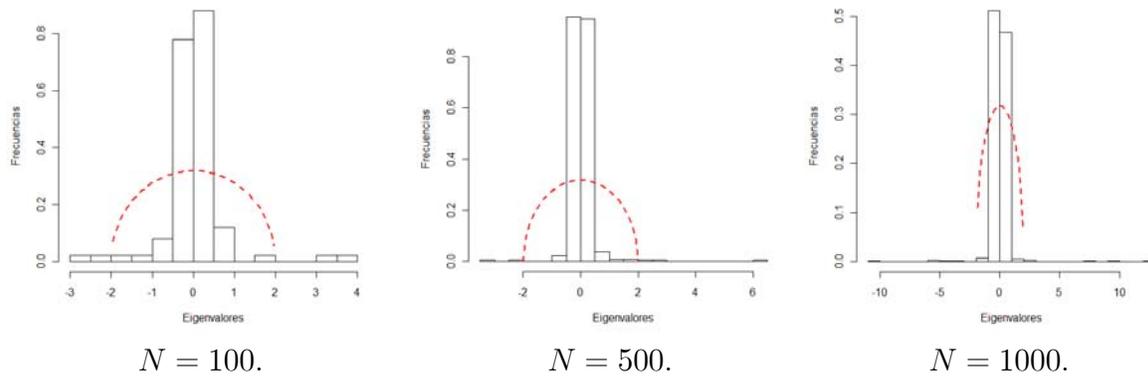


$N = 500.$



$N = 1000.$

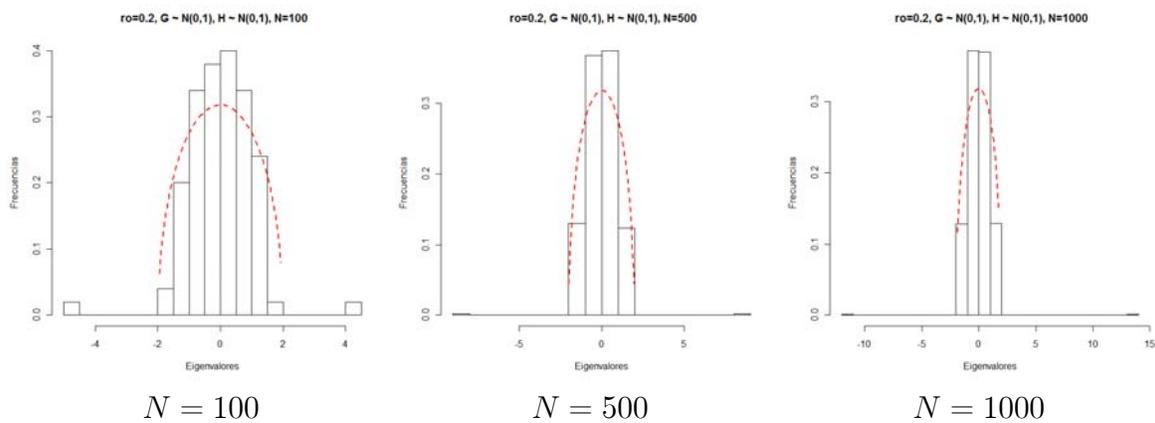
Ejemplo 6. G distribución Cauchy y H distribución $N(0, 1)$.



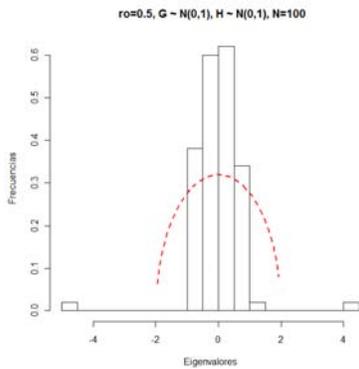
Vemos que en los ejemplos 4, 5 y 6 las matrices aleatorias no cumplen las hipótesis del Teorema de Wigner, lo que se ve claramente debido a que los histogramas no ajustan a la distribución del semicírculo.

Caso III. Matrices de Wigner, A , con todas las componentes $N(0, 1)$ independientes y $W = \Sigma^{1/2}A\Sigma^{1/2}$, donde $\Sigma = (\sigma_{ij})$, $\sigma_{ii} = 1, i = 1, \dots, N$ y $\sigma_{ij} = \rho$. La matriz W no tiene componentes independientes.

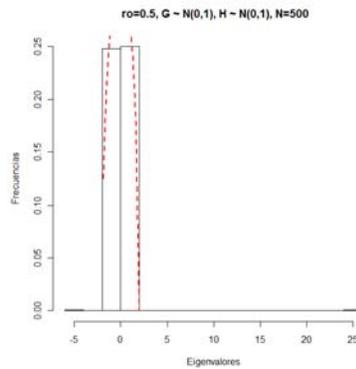
Ejemplo 7. $\rho = \frac{1}{5}$



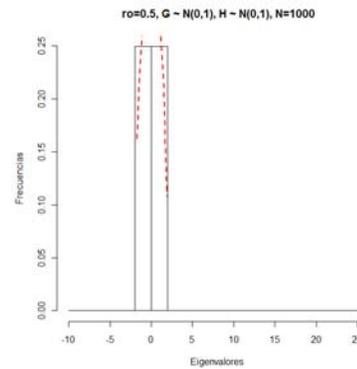
Ejemplo 8. $\rho = \frac{1}{2}$



$N = 100$

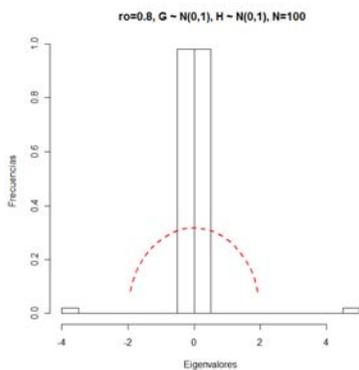


$N = 500$

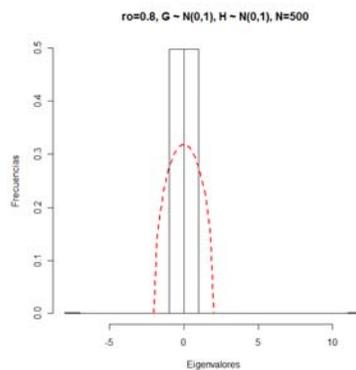


$N = 1000$

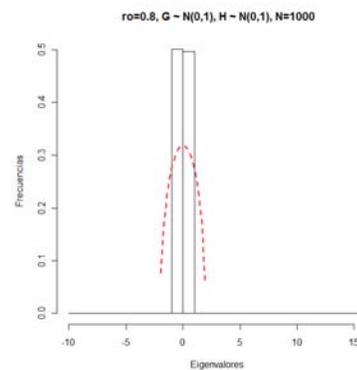
Ejemplo 9. $\rho = \frac{4}{5}$



$N = 100$



$N = 500$



$N = 1000$

En los ejemplos 7, 8 y 9 las matrices aleatorias no tienen componentes independientes lo que es una de las hipótesis del Teorema de Wigner. Observamos que conforme ρ varía de $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{5}$, es decir aumenta de 0.2 a 0.8, empeora el ajuste a la distribución del semicírculo de los histogramas de los eigenvalores de las matrices simuladas.

Apéndice A

Demostraciones

Demostración del Lema 3. Sea

$$\begin{aligned} m_{2k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^{2k} \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2k} \sqrt{4-x^2} dx \quad \text{simetría} \\ &= \frac{2^{2k+1}}{\pi} \int_0^1 y^{k-\frac{1}{2}} (1-y)^{\frac{1}{2}} dy, \quad \text{cambio de variable } x = 2\sqrt{y} \\ &= \frac{2^{2k+1}}{\pi} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(k+2)}, \end{aligned}$$

Ahora probaremos por inducción que $m_{2k} = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} = C_k$.

Para $k = 1$ tenemos que $m_2 = \frac{2^{2+1}}{\pi} \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1+2)} = 1$, por otro lado $\frac{1}{2} \binom{2}{1} = 1$.

Hipótesis de inducción: $\forall k \geq 1 \quad m_{2k} = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$.

Para $k+1$ tenemos que

$$m_{2(k+1)} = \frac{2^{2(k+1)+1}}{\pi} \frac{\Gamma(k+1+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(k+1+2)} = \frac{2^{2k+3}}{\pi} \frac{(k+\frac{1}{2}) \Gamma(k+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{(k+2) \Gamma(k+2)}$$

ya que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, para $\alpha > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} m_{2(k+1)} &= \frac{2^2 (k+\frac{1}{2})}{(k+2)} \frac{(2k)!}{(k+1) k! k!} = \frac{2^2 (k+\frac{1}{2}) (k+1)}{(k+2)} \frac{(2k)!}{(k+1)! (k+1)!} \\ &= \frac{(2k+1) (2k+2) (2k)!}{(k+2) (k+1)! (k+1)!} = \frac{(2k+2)!}{(k+2) (k+1)! (k+1)!} \\ &= \frac{1}{(k+2)} \binom{2k+2}{k+1} = C_{k+1}. \end{aligned}$$

■

Demostración del Lema 10. Usaremos inducción en el número de vértices.

Si sólo se tiene un vértice, i.e., $|V| = 1$, el número de aristas es mayor o igual que cero, i.e., $|E| \geq 0$. Por consiguiente se tiene que $|E| + 1 \geq 1 = |V|$ por lo tanto el lema es válido para $|V| = 1$.

Hipótesis de inducción: En una gráfica conexa con n vértices se cumple que $|V| \leq |E| + 1$.

Sea $G = (V, E)$ una gráfica con $n + 1$ vértices, i.e., $|V| = n + 1$.

Tomemos un vértice $v \in V$, este vértice está contenido en $\ell \geq 1$ aristas $e_1, e_2, \dots, e_\ell \in E$.

Si $\ell = 1$, entonces existe un $u \in V$ tal que $(u, v) \in E$, al quitar la arista (u, v) obtenemos dos gráficas conexas. La gráfica G_1 formada por un solo vértice, y la gráfica G_2 con n vértices.

De aquí que

$$|E| = |E_2| + 1$$

y

$$|V| = |V_2| + |V_1| = |V_2| + 1 \leq |E_2| + 1 + 1 = |E| + 1.$$

Si $\ell \geq 2$, la gráfica $G = (V, E)$ la podemos descomponer en r gráficas conexas, $r \leq \ell$, G_1, \dots, G_r , $G_j = (V_j, E_j)$, donde $1 \leq |V_j| \leq n$, $1 \leq j \leq r$.

Se cumple que

$$|V| = \sum_{j=1}^r |V_j| - r + 1 \quad \text{y} \quad |E| = \sum_{j=1}^r |E_j|. \quad (\text{A.1})$$

Por la hipótesis de inducción se sigue que

$$\sum_{j=1}^r |V_j| \leq \sum_{j=1}^r (|E_j| + 1),$$

de donde, usando (A.1) obtenemos que

$$|V| + r - 1 \leq |E| + r,$$

por lo tanto concluimos que $|V| \leq |E| + 1$, para toda gráfica conexa con $n + 1$ vértices. ■

Demostración del Lema 11. Sea A una matriz de $N \times N$, se cumple que

$$(A^k)_{i_1 i_1} = \sum_{i_2, \dots, i_k=1}^N a_{i_1 i_2} \dots a_{i_k i_1}.$$

Probaremos este Lema por inducción.

Por la regla para multiplicar matrices m compatibles C y D , $(CD)_{ij} = \sum_{h=1}^m C_{ih} D_{hj}$, tenemos que para $k = 2$

$$(A^2)_{i_1 i_1} = \sum_{i_2=1}^N a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_1}.$$

Supongamos que se cumple para k , es decir

$$(A^k)_{i_1 i_1} = \sum_{i_2, \dots, i_k=1}^N a_{i_1 i_2} \dots a_{i_k i_1}.$$

Probemos para $k + 1$

$$\begin{aligned} (A^{k+1})_{i_1 i_1} &= (A^k A)_{i_1 i_1} = \sum_{i_{k+1}=1}^N \left(\sum_{i_2, \dots, i_k=1}^N a_{i_1 i_2} \dots a_{i_k i_{k+1}} \right) a_{i_{k+1} i_1} \\ &= \sum_{i_2, \dots, i_{k+1}=1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{k+1} i_1}. \end{aligned}$$

■

Demostración del Lema 13.

Reflexibilidad: Para toda $G \in \Lambda_{k,m}$, trivialmente se cumple que $G \cong G$, pues la biyección identidad cumple lo solicitado.

Simetría: Sean $G_1, G_2 \in \Lambda_{k,m}$ tal que $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, y $G_1 \cong G_2$. Sea θ la biyección de V_1 en V_2 , tenemos que θ^{-1} es biyección de V_2 en V_1 . La condición $(u, v) \in E_1 \iff (\theta(u), \theta(v)) \in E_2$, es equivalente a la condición $(\bar{u}, \bar{v}) \in E_2 \iff (\theta^{-1}(\bar{u}), \theta^{-1}(\bar{v})) \in E_1$ por lo que tenemos que $G_2 \cong G_1$.

Transitividad: Sean $G_1, G_2, G_3 \in \Lambda_{k,m}$ $G_l = (V_l, E_l)$, $l = 1, 2, 3$, $G_1 \cong G_2$ y $G_2 \cong G_3$.

$(u_1, v_1) \in E_1 \iff (\theta_1(u_1), \theta_1(v_1)) \in E_2$ y $(u_2, v_2) \in E_2 \iff (\theta_2(u_2), \theta_2(v_2)) \in E_3$.

Entonces tenemos que $(\theta_1(u_1), \theta_1(v_1)) \in E_2 \iff (\theta_2(\theta_1(u_1)), \theta_2(\theta_1(v_1))) \in E_3$

$= ((\theta_2 \circ \theta_1)(u_1), (\theta_2 \circ \theta_1)(v_1)) \in E_3$ y $\theta_2 \circ \theta_1$ es una biyección de V_1 en V_3 , en consecuencia $G_1 \cong G_3$. ■

Demostración del Lema 16. Sean $G_1 = (\{1, \dots, m\}, E_1)$ y $G_2 = (\{1, \dots, m\}, E_2)$ con $E_1 \neq E_2$, dos gráficas $\Gamma_{k,m}$ -canónicas y supongamos que $G_1 \cong G_2$. Entonces existe una biyección θ de $\{1, \dots, m\}$ a $\{1, \dots, m\}$, esta biyección es una permutación de los elementos de $\{1, \dots, m\}$ digamos (π_1, \dots, π_m) , esta permutación contiene por lo menos dos elementos π_j y π_l tal que $\pi_j > \pi_l$ y $j < l$, lo que viola la condición 3 de la Definición 14, a menos que $E_1 = E_2$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $E_1 = E_2 \Rightarrow G_1 = G_2$. ■

Demostración del Lema 17. Sea $G = (\{i_1, \dots, i_k\}, \{e_1, \dots, e_k\}) \in \Lambda_{k,m}$. Sea h una función de $\{i_1, \dots, i_k\}$ a $\{1, \dots, m\}$, definida como

$$h(i_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ h(i_r) & \text{si } \exists r : i_j = i_r \text{ para algún } r, 1 \leq r \leq j-1 \\ \max\{h(i_1), \dots, h(i_{j-1})\} + 1, & \text{otro caso} \end{cases}$$

donde $1 \leq r \leq j-1$. Esta función asocia una gráfica $\Gamma_{k,m}$ -canónica a la gráfica G , donde las aristas de la gráfica $\Gamma_{k,m}$ -canónica están dados por $e_j = (h(i_j), h(i_{j+1}))$, $1 \leq j \leq k$, $h(i_{k+1}) = 1$. ■

Demostración del Lema 19. Sea $[\Gamma_{k,m,l}]$, $1 \leq l \leq C_{k,m}$ una clase de equivalencia en $\Lambda_{k,m}$. $G = (V, E) \in [G_j] \iff$ existe una biyección de $V \subset \{1, \dots, N\}$ a $\{1, \dots, m\}$. Esto se cumple $\iff |V| = m$. Se tienen P_m^N maneras elegir un subconjunto de m elementos de uno de N elementos importando el orden. ■

Demostración de la proposición 20. Consideremos la partición de $\Lambda_{k,m}$ de la siguiente manera

$$\Lambda_{k,m} = \bigcup_{l=1}^{C_{k,m}} [\Gamma_{k,m,l}],$$

entonces

$$|\Lambda_{k,m}| = \sum_{l=1}^{C_{k,m}} |[\Gamma_{k,m,l}]| = \sum_{l=1}^{C_{k,m}} P_m^N = C_{k,m} P_m^N.$$

■

Demostración del Lema 22. Por el Lema 10 $|\tilde{E}(G(\mathbf{i}))| + 1 \geq |\tilde{V}(G(\mathbf{i}))|$ de donde $|\tilde{E}(G(\mathbf{i}))| \geq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + t - 1$. Para unir $\frac{k}{2} + t$ vértices se necesitan $\frac{k}{2} + t - 1$ aristas. Restan $1 + \frac{k}{2} - t$ aristas para completar k , por la estructura cíclica sólo se pueden duplicar $\frac{k}{2} - t$ aristas, es decir se han utilizado $k - 2t$ aristas, por lo que quedan $2t$ aristas las cuales son simples

$$2 \overbrace{\left(\frac{k - 2t}{2} \right)}^{\text{aristas dobles}} + \underbrace{2t}_{\text{aristas simples}} = k.$$

■

Demostración del Lema 24. Primero demostraremos la necesidad. Por hipótesis G es conexa, supongamos por reducción al absurdo que G no es un árbol, entonces G tiene al menos un ciclo. Sea C un ciclo en G con r vértices y r aristas. G se divide en $l \geq 1$ gráficas conexas G_1, \dots, G_l . Por el Lema 10 tenemos que $|V_i| \leq |E_i| + 1$, además $|E| = \sum_{i=1}^l |E_i| + r$, tenemos entonces

$$|V| = \sum_{i=1}^l |V_i| + r - l \leq \sum_{i=1}^l (|E_i| + 1) + r - l = \sum_{i=1}^l |E_i| + r = |E|$$

es decir $|E| \geq |V|$, lo cual contradice que $|V| = |E| + 1$. Por lo tanto G no tiene ciclos, i.e. G es un árbol.

Para demostrar la suficiencia usaremos inducción matemática sobre $|E|$. Si $|E| = 0$ el árbol está formado por un solo vértice, entonces

$$|V| = 1 = |E| + 1.$$

Supongamos ahora que es cierto para $|E| = k$. Ahora consideremos un árbol G tal que $|E| = k + 1$. Si eliminamos una arista obtenemos dos subárboles, $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, tales que $|V| = |V_1| + |V_2|$ y $|E_1| + |E_2| + 1 = |E|$. Como $0 \leq |E_1| \leq k$ y $0 \leq |E_2| \leq k$, de la hipótesis de inducción se sigue que $|E_i| + 1 = |V_i|$, en consecuencia, $|V| = |V_1| + |V_2| = (|E_1| + 1) + (|E_2| + 1) = |E| + 1$, por lo tanto se cumple para $k + 1$, por lo que queda demostrado el lema.

■

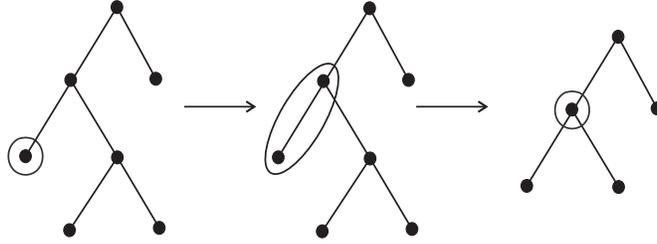


Figura A.1: Eliminamos al vértice marcado y a su padre.

Demostración del Lema 25. Denotemos por $B(k)$ el número de árboles binarios con k padres, veremos que estos satisfacen la recurrencia

$$(k + 1)B_k = 2(2k - 1)B_{k-1}, \quad (k > 1).$$

Un árbol con n niños (un niño es un vértice sin descendientes) tiene $n - 1$ padres y $2n - 1$ vértices.

Para demostrar la recurrencia construyamos un árbol con k padres (de B_k maneras) y seleccionamos en él al hijo menos favorito (cualquiera de los $k + 1$ niños). Los eliminamos a él y a su padre y promovemos al hermano al lugar del padre, ver la figura A.1. Vemos que esto nos da $(k + 1)B_k$ ya que de los B_k diferentes árboles binarios con k padres podemos seleccionar cualquiera de los $k + 1$ niños.

Obtenemos un árbol con k vértices, y marcamos el que corresponde al hermano recién promovido.

De manera inversa, en un árbol binario con $k - 1$ padres con un vértice marcado (cualquiera de los $2k - 1$) le asociamos dos gráficas con k padres una que corresponde al hijo derecho y otra que le corresponde al hijo izquierdo (ver la Figura A.2). Es decir $2(2k - 1)B_{k-1}$ ya que tenemos B_{k-1} árboles diferentes con $k - 1$ padres donde cualquiera de los $2k - 1$ vértices puede estar seleccionado.

Por lo que queda demostrada la recurrencia

$$(k + 1)B_k = 2(2k - 1)B_{k-1}, \quad (k > 1).$$

Mostraremos por inducción que

$$B_k = \frac{1}{k + 1} \binom{2k}{k}.$$

Si $k = 2$ entonces $3B_2 = 2(3)B_1$, de aquí que $B_2 = 2$, por otro lado $\frac{1}{3} \binom{4}{2} = 2$.

Hipótesis de inducción: $\forall k \geq 2 \ B_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$

Para $k + 1$ se cumple que

$$(k + 2)B_{k+1} = 2(2(k + 1) - 1)B_k.$$

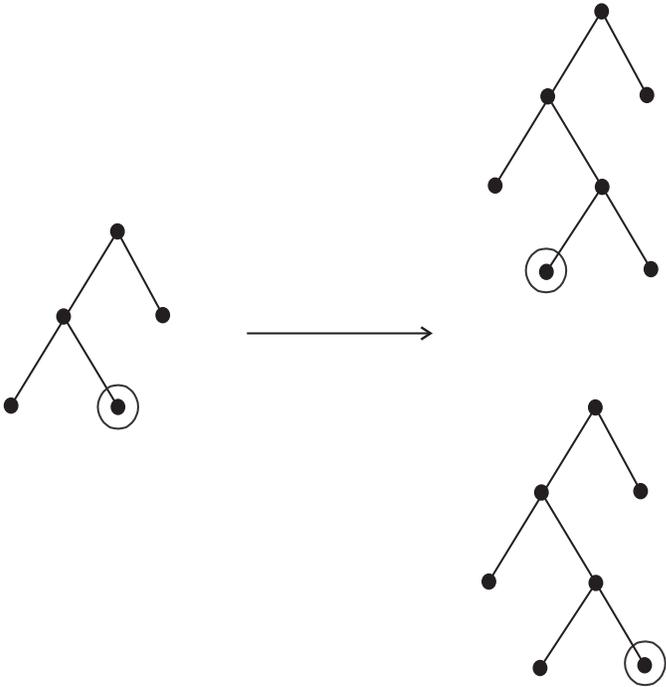


Figura A.2: Dos árboles binarios con 3 padres que se obtienen a partir de uno de 2 padres.

Por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}
 B_{k+1} &= \frac{2(2k+1)}{k+2} \frac{1}{k+1} \frac{(2k)!}{k!k!} \\
 &= \frac{2(2k+1)(k+1)}{k+2} \frac{(2k)!}{(k+1)!(k+1)!} \\
 &= \frac{1}{(k+1)+1} \binom{2(k+1)}{k+1}.
 \end{aligned}$$

■

Demstración del lema 27.

Prueba de (a). Tomando $\varepsilon = 0$ en la demostración de lema 29 y siguiendo los pasos de dicha demostración llegamos a la conclusión deseada.

Prueba de (b). Dado que la región $A_n = \{x : |x| \geq \sqrt{n}\} \searrow \emptyset$ se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \sqrt{n}} |x|^p H(dx) = 0.$$

Prueba de (c). Tenemos que

$$\begin{aligned}
 \left| n^{(p-1)/2} \int_{|x| \geq \sqrt{n}} x H(dx) \right| &\leq n^{p/2} \int_{|x| \geq \sqrt{n}} \left| \frac{x}{\sqrt{n}} \right| H(dx) \\
 &\leq n^{p/2} \int_{|x| \geq \sqrt{n}} \left| \frac{x}{\sqrt{n}} \right|^p H(dx) \\
 &= \int_{|x| \geq \sqrt{n}} |x|^p H(dx).
 \end{aligned}$$

Concluimos la demostración utilizando el Lema 27 (b).

■

Demstración del lema 28. Tenemos que

$$0 = \int x H(dx) = \int_{|x| < \sqrt{n}} x H(dx) + \int_{|x| \geq \sqrt{n}} x H(dx).$$

Así

$$0 = n^{(p-1)/2} \int_{|x| < \sqrt{n}} x H(dx) + n^{(p-1)/2} \int_{|x| \geq \sqrt{n}} x H(dx)$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{(p-1)/2} \int_{|x| < \sqrt{n}} x H(dx) + \lim_{n \rightarrow \infty} n^{(p-1)/2} \int_{|x| \geq \sqrt{n}} x H(dx)$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{(p-1)/2} \int_{|x| < \sqrt{n}} x H(dx) + 0.$$

■

Demostración del Lema 29. Tenemos que si $0 \leq x \leq 1$ entonces $0 \leq x^p \leq x^q \leq 1$, si $p \geq q$.
Luego

$$\begin{aligned} \int_{|x| < \sqrt{N}} |x|^r H(dx) &= N^{\frac{r}{2}} \int_{\left| \frac{x}{\sqrt{N}} \right| < 1} \left| \frac{x}{\sqrt{N}} \right|^r H(dx) \leq N^{\frac{r}{2}} \int_{\left| \frac{x}{\sqrt{N}} \right| < 1} \left| \frac{x}{\sqrt{N}} \right|^{p+\varepsilon} H(dx) \\ &= N^{\frac{r-p-\varepsilon}{2}} \int_{\left| \frac{x}{\sqrt{N}} \right| < 1} |x|^{p+\varepsilon} H(dx) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{\frac{p-r}{2}} \int_{\left| \frac{x}{\sqrt{N}} \right| < 1} |x|^r H(dx) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-\frac{\varepsilon}{2}} \int_{\left| \frac{x}{\sqrt{N}} \right| < 1} |x|^r H(dx) = 0.$$

■

Demostración del Lema 30. Sea $G(\mathbf{i}) \in \Lambda_{k,m}$ con k par y $2 \leq m \leq \frac{k}{2}$.

Sea $j_1 = \max(j : m_{ij} \neq 0 : 1 \leq j \leq k)$ y $j_2 = \max(j : n_{ij} \neq 0 : 1 \leq j \leq k)$.

Obsérvese que $1 \leq j_1 \leq k - m + 2$, y $0 \leq j_2 \leq k - m + 1$

Tomemos la gráfica \hat{G}_I a partir de ésta podemos construir la gráfica $G(\mathbf{i})$ mediante el reacomodo de aristas en \hat{G}_I .

Probaremos que ningún reacomodo de arista en \hat{G}_I genera una gráfica con valor mayor de γ_I .

Para esto consideraremos los siguientes casos:

Caso 1: De acuerdo con las Tablas 1.1 y 1.2 en los casos

a $1 \leq j_1 \leq p$ y $0 \leq j_2 \leq q$

b $j_1 \geq p + 1, j_2 \geq 0$

c $2 \leq j_1 \leq p, 0 \leq j_2 \leq q$

ningún reacomodo de arista en \hat{G}_I genera una gráfica con valor mayor de γ_I .

Caso 2: $2 \leq j_1 \leq p, j_2 \geq q + 1$

$$m_{j_1+j_2} \longrightarrow m_{j_1+j_2} - 1$$

$$m_{j_1} \longrightarrow m_{j_1} + 1 \text{ (no aplica en la suma)}$$

$$n_{j_2} \longrightarrow n_{j_2} + 1$$

$$\gamma[\Upsilon^*(k)] = \gamma[\Upsilon(k)] - \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - p) + \frac{1}{2}(j_2 - q)$$

$$= \gamma[\Upsilon(k)] - \frac{1}{2}(j_1 + j_2) + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}j_2 - \frac{1}{2}q$$

$$= \gamma[\Upsilon(k)] - \frac{1}{2}j_1 + \frac{1}{2}(p - q)$$

Caso 3: $j_1 = 1, j_2 \geq q + 1$

$$m_{1+j_2} \longrightarrow m_{1+j_2} - 1$$

$$m_1 \longrightarrow m_1 + 1$$

$$n_{j_2} \longrightarrow n_{j_2} + 1$$

$$\gamma[\Upsilon^*(k)] = \gamma[\Upsilon(k)] - \frac{1}{2}(1 + j_2 - p) + \frac{1}{2}(1 - p) + \frac{1}{2}(j_2 - q)$$

$$= \gamma[\Upsilon(k)] - \frac{1}{2}q \quad \blacksquare$$

Demostración del Lema 32. Cualquier gráfica con $m = \frac{k}{2} + t$ tiene por lo menos $2t$ aristas simples y a lo mas $\frac{k}{2} - t$ aristas dobles. Si $G(\mathbf{i})$ es una cualquier gráfica con $\frac{k}{2} + t$ vértices, y k aristas se genera a partir de \hat{G}_{II} mediante la resta de aristas dobles por lo que

$$\gamma[G(\mathbf{i})] \leq \gamma_{II}, \quad \forall \mathbf{i}. \quad \blacksquare$$

Demostración del Lema 33. Cualquier gráfica con $m = \lceil \frac{k}{2} \rceil + t$ tiene por lo menos $2t - 1$ aristas simples y a lo mas $\lceil \frac{k}{2} \rceil - t + 1$ aristas dobles. Si $G(\mathbf{i})$ es una cualquier gráfica con $\lceil \frac{k}{2} \rceil + t$ vértices, y k aristas se genera a partir de \hat{G}_{III} mediante la resta de aristas dobles por lo que

$$\gamma[G(\mathbf{i})] \leq \gamma_{III}, \quad \forall \mathbf{i}. \quad \blacksquare$$

Demostración del Lema 34. A partir de la gráfica \hat{G}_{IV} podemos obtener cualquier gráfica con $m = 1 + \frac{k}{2}$ y $|\tilde{E}| > \frac{k}{2}$ realizando reacomodos de aristas dobles a la requerida. De acuerdo con la Tablas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4 ninguno de estos reacomodos incrementa a $\gamma[G(\mathbf{i})]$. Por lo tanto

$$\gamma[G(\mathbf{i})] \leq \gamma(\hat{G}_{IV}), \quad \forall \mathbf{i}. \quad \blacksquare$$

Demostración del Lema 36. Sabemos que el esqueleto de una gráfica no toma en cuenta vértices ni aristas repetidas por lo que los m vértices de $\tilde{V}(G(\mathbf{i}, \mathbf{j}))$ son distintos. Como $m_1 + m_2 = m$ entonces $\tilde{V}(G(\mathbf{i})) + \tilde{V}(G(\mathbf{j})) = \tilde{V}(G(\mathbf{i}, \mathbf{j}))$.

Supongamos por reducción al absurdo que $\tilde{V}(G(\mathbf{i})) \cap \tilde{V}(G(\mathbf{j})) \neq \emptyset$, es decir que existe un vértice v tal que $v \in \tilde{V}(G(\mathbf{i}))$ y $v \in \tilde{V}(G(\mathbf{j}))$.

Tenemos entonces que

$$|\tilde{V}(G(\mathbf{i})) - v| = m_1 - 1$$

y

$$|\tilde{V}(G(\mathbf{j})) - v| = m_2 - 1.$$

Luego

$$m - 1 = |\tilde{V}(G(\mathbf{i}, \mathbf{j})) - v| \leq m_1 - 1 + m_2 - 1 = m - 2$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto $\tilde{V}(G(\mathbf{i})) \cap \tilde{V}(G(\mathbf{j})) = \emptyset$. \blacksquare

Demostración del Lema 37. Tenemos que $\tilde{V}(G(\mathbf{i})) = m_1$ y $\tilde{V}(G(\mathbf{j})) = m_2$ donde $\tilde{V}(G(\mathbf{i})) \cap \tilde{V}(G(\mathbf{j})) = \emptyset$, esto implica que

$$\tilde{E}(G(\mathbf{i})) \cap \tilde{E}(G(\mathbf{j})) = \emptyset.$$

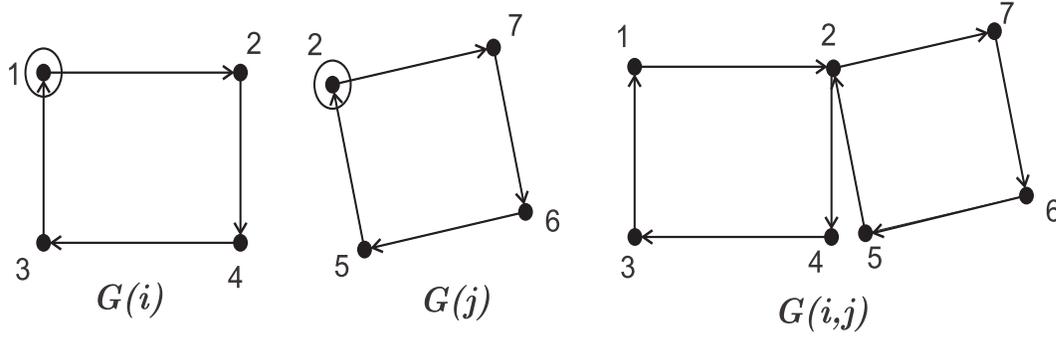


Figura A.3: $\tilde{E}(G(\mathbf{i})) \cap \tilde{E}(G(\mathbf{j})) = \emptyset$ pero $\tilde{V}(G(\mathbf{i})) \cap \tilde{V}(G(\mathbf{j})) = 2$.

De aquí que

$$\begin{aligned} Q(G(\mathbf{i}, \mathbf{j})) &= E(\bar{a}_{i_1 i_2} \bar{a}_{i_2 i_3} \cdots \bar{a}_{i_k i_1} \bar{a}_{j_1 j_2} \bar{a}_{j_2 j_3} \cdots \bar{a}_{j_k j_1}) \\ &= E(\bar{a}_{i_1 i_2} \bar{a}_{i_2 i_3} \cdots \bar{a}_{i_k i_1}) E(\bar{a}_{j_1 j_2} \bar{a}_{j_2 j_3} \cdots \bar{a}_{j_k j_1}) \\ &= Q(G(\mathbf{i})) Q(G(\mathbf{j})). \end{aligned}$$

Observación 40 Tenemos que $\tilde{V}(G(\mathbf{i})) \cap \tilde{V}(G(\mathbf{j})) = \emptyset$ implica que $\tilde{E}(G(\mathbf{i})) \cap \tilde{E}(G(\mathbf{j})) = \emptyset$, pero $\tilde{E}(G(\mathbf{i})) \cap \tilde{E}(G(\mathbf{j})) = \emptyset$ no implica que $\tilde{V}(G(\mathbf{i})) \cap \tilde{V}(G(\mathbf{j})) = \emptyset$. ■

Demostración del Lema 38. Sea $A = \{\omega \in \Omega : |M(\omega) - EM(\omega)| > \varepsilon\}$, y sea $\omega \in A$, entonces si $M(\omega) = \bar{M}(\omega)$

$$\varepsilon < |M_{k,N}(\omega) - EM_{k,N}(\omega)| = |\bar{M}_{k,N}(\omega) - EM_{k,N}(\omega)|$$

lo que implica que

$$|\bar{M}_{k,N}(\omega) - EM_{k,N}(\omega)| > \varepsilon.$$

Por lo tanto se tiene que

$$|\bar{M}_{k,N}(\omega) - EM_{k,N}(\omega)| > \varepsilon \text{ ó } |M_{k,N}(\omega) - \bar{M}_{k,N}(\omega)| \neq 0.$$

Luego

$$A \subset \{\omega : |\bar{M}_{k,N}(\omega) - EM_{k,N}(\omega)| > \varepsilon\} \cup \{\omega : |M_{k,N}(\omega) - \bar{M}_{k,N}(\omega)| \neq 0\},$$

de aquí que

$$\begin{aligned} P(A) &\leq P(\{\omega : |\bar{M}_{k,N}(\omega) - EM_{k,N}(\omega)| > \varepsilon\} \cup \{\omega : |M_{k,N}(\omega) - \bar{M}_{k,N}(\omega)| \neq 0\}) \\ &\leq P(\{\omega : |\bar{M}_{k,N}(\omega) - EM_{k,N}(\omega)| > \varepsilon\}) + P(\{\omega : |M_{k,N}(\omega) - \bar{M}_{k,N}(\omega)| \neq 0\}), \end{aligned}$$

Sea $\omega \in \Omega$ tal que $M_{k,N}(\omega) \neq \bar{M}_{k,N}(\omega)$, si $a_{ij} = \bar{a}_{ij} \forall i, j$, entonces $M_{k,N} = \bar{M}_{k,N}$, por lo tanto existe (i, j) tal que $a_{ij} \neq \bar{a}_{ij}$. Si

$$x \in \{\omega : |M_{k,N}(\omega) - \bar{M}_{k,N}(\omega)| \neq 0\} \implies x \in \bigcup_{i \leq j} \{\omega : a_{ij} \neq \bar{a}_{ij}\}$$

entonces

$$P(\{\omega : |M_{k,N}(\omega) - \bar{M}_{k,N}(\omega)| \neq 0\}) \leq \sum_{i \leq j} P(a_{ij} \neq \bar{a}_{ij}).$$

Usando la desigualdad de Chebyshev se tiene que

$$P(\{\omega : |\bar{M}_{k,N}(\omega) - E\bar{M}_{k,N}(\omega)| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(\bar{M}_{k,N}).$$

Por lo tanto se cumple el lema. ■

Demostración del lema 39. Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \sqrt{N}} x^p H(dx) &\geq \int_{|x| \geq \sqrt{N}} (\sqrt{N})^p H(dx) = N^{\frac{p}{2}} \int_{|x| \geq \sqrt{N}} H(dx) \\ &= N^{\frac{p}{2}} P(|X| > \sqrt{N}). \end{aligned}$$
■

Apéndice B

Resultados de Probabilidad

B.1 Tipos de convergencia

B.1.1 Convergencia en probabilidad

Una sucesión de variables aleatorias X_n converge en probabilidad a una constante θ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \theta| > \varepsilon) = 0,$$

para cualquier $\varepsilon > 0$, en notación escribimos

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \theta.$$

B.1.2 Desigualdad de Chebyshev

Si X es una variable aleatoria de media μ y varianza finita σ^2 , entonces, para todo número real $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Lema 41 Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = \theta \quad y \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}X_n = 0.$$

Entonces

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \theta.$$

Demostración.

$$P(|X_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}(X_n - \theta)^2$$

el resultado se sigue del hecho de que

$$E(X_n - \theta)^2 = [E(X_n - \theta)]^2 + \text{Var}X_n$$

■

B.1.3 Convergencia casi segura

Una sucesión de variables aleatorias, $\{X_n\}$, converge con probabilidad 1, o de forma casi segura, a una variable aleatoria X cuando se cumple que:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1,$$

de esta forma interpretaremos que $X_n \xrightarrow{c.s.} X$.

B.1.4 Convergencia en distribución y débil

Una sucesión de funciones de distribución $F_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$ se dice que *convergen débilmente* a una función de distribución $F(x)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x),$$

para todo x que sea punto de continuidad de F . Se utiliza la notación $F_n \xrightarrow{D} F$.

Una sucesión X_n de variables aleatorias convergen en *ley* o en *distribución* a X si las funciones de distribución de X_n convergen débilmente a la función de distribución de X .

La definición de convergencia débil tiene la siguiente caracterización.

Teorema. $F_n \xrightarrow{D} F$ si, y solo si, para toda función continua y acotada $f(x)$ en \mathbb{R} se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) F_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) F(dx).$$

B.1.5 Lema de Borel-Cantelli

Definición 42 Dada una sucesión de sucesos A_1, A_2, \dots en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, se define el límite superior de los $\{A_i\}$ como

$$\overline{\lim} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Dada una sucesión de sucesos A_1, A_2, \dots en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, se define el límite inferior de los $\{A_i\}$ como

$$\underline{\lim} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Lema de Borel-Cantelli:

Lema 43 Sean A_1, A_2, \dots una sucesión en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, entonces

$$P(\overline{\lim} A_n) = 0.$$

B.2 Notación “O grande”

Definición 44 Sea $f(x)$ y $g(x)$ funciones definidas en un subconjunto de los reales. Definimos

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \longrightarrow \infty,$$

si y solamente si, para un valor suficientemente grande de x , $f(x)$ es mayor que $g(x)$ multiplicada por una constante. Esto es, $f(x) = O(g(x))$ si y solamente si existe un número real positivo M y un número x_0 tal que

$$|f(x)| \leq M |g(x)| \quad \text{para todo } x > x_0.$$

Esta definición también es usada para describir el comportamiento de f cerca de un número real a , es decir

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{cuando } x \longrightarrow a,$$

si y solamente si existe un número δ y M tal que

$$|f(x)| \leq M |g(x)| \quad \text{para } |x - a| < \delta.$$

Si $g(x)$ es diferente de cero para valores de x suficientemente cerca de a , ambas definiciones se pueden unificar usando el límite superior:

$$f(x) = O(g(x)), \quad \text{cuando } x \longrightarrow a,$$

si y solo si

$$\limsup_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty.$$

Bibliografía

- [1] Anderson, G. W., Guionnet, A. y Zeitouni, O. (2010). *An Introduction to Random Matrices*. Cambridge University Press.
- [2] Arnold, L. (1967). On the asymptotic distribution of the eigenvalues of random matrices. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 20, 262-268.
- [3] Bai, Z. y Silverstein, J. W. (2010). *Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices 2ed*. Springer Series in Statistics.
- [4] Bondy J. A. y Murty U. S. R. (2008) *Graph Theory*. Springer. Graduate Texts in Mathematics 244.
- [5] Domínguez Molina, J.A. y Rocha Arteaga A. (2009). El Teorema de Wigner para Matrices Aleatorias. *Comunicación del CIMAT* No I-09-08/15-10-2009. <http://www.cimat.mx/reportes/enlinea/I-09-08.pdf>. *Por aparecer en la Revista Miscelánea Matemática de la Sociedad Matemática Mexicana no 52, 2011.*
- [6] Grimaldi, R. P. (2004). *Discrete and Combinatorial Mathematics. An Applied Introduction 5th ed*. Pearson Education, Inc.
- [7] Guionnet, A. (2009). *Large Random Matrices: Lectures on Macroscopic Asymptotics*. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXVI 2006 (Lecture Notes in Mathematics, Ecole d'Été de Probabilités de St. Flour, Springer).
- [8] Loève, M. (1978). *Probability Theory I*. 4th Ed. Springer-Verlag.
- [9] Mehta, M. L. (2004). *Random Matrices*. Third Edition. Elsevier
- [10] Rosas, M. (2003). Los Números de (Euler)-Catalan. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 1.
- [11] Scheinerman, E. R. (2006). *Mathematics: A Discrete Introduction 2ed*. Brooks Cole.
- [12] Wigner, E. P. (1958). On the distributions of the roots of certain symmetric matrices. *Annals of Mathematics*, Vol. 67, No. 2, 325-327.