Medida de Haar

Sandra Palau Calderón

23 de Abril de 2014

Índice

Grupo topológico

Definición

Un grupo es un conjunto G con una operación multiplicación $\bullet : G \times G \to G$, $\bullet(g,h) = gh$, tal que

- asociativo: $(xy)z = x(yz)$.
- tiene un elemento neutro e, $ex = x = xe$.
- para cada $x \in G$ existe su inverso x^{-1}: $xx^{-1} = e = x^{-1}x$.

Si además G tiene una topología y las operaciones multiplicación e inversión son continuas, diremos que el grupo es topológico.

1 Sea G un grupo. Definimos la topología discreta τ como la topología en la que cada punto es un conjunto abierto.

Ejemplos de grupos topológicos

1. Sea G un grupo. Definimos la topología discreta τ como la topología en la que cada punto es un conjunto abierto.
2. $\mathbb{R}^n$ con la topología usual y la operación suma.

Ejemplos de grupos topológicos

1. Sea G un grupo. Definimos la topología discreta τ como la topología en la que cada punto es un conjunto abierto.
2. $\mathbb{R}^n$ con la topología usual y la operación suma.
3. $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ con la operación multiplicación y la topología relativa a $\mathbb{R}$.

Ejemplos de grupos topológicos

1. Sea G un grupo. Definimos la topología discreta τ como la topología en la que cada punto es un conjunto abierto.
2. $\mathbb{R}^n$ con la topología usual y la operación suma.
3. $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ con la operación multiplicación y la topología relativa a $\mathbb{R}$.
4. $\mathbb{S}^1$ el círculo unitario con la topología relativa a $\mathbb{C}$ y la multiplicación de complejos.

Ejemplos de grupos topológicos

1 Sea G un grupo. Definimos la topología discreta τ como la topología en la que cada punto es un conjunto abierto.

2 $\mathbb{R}^n$ con la topología usual y la operación suma.

3 $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ con la operación multiplicación y la topología relativa a $\mathbb{R}$.

4 $\mathbb{S}^1$ el círculo unitario con la topología relativa a $\mathbb{C}$ y la multiplicación de complejos.

5 $\mathcal{GL}(n)$, la colección de todas las matrices invertibles de $n \times n$, con la multiplicación usual de matrices, la identidad como elemento neutro y la topología relativa a $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Ejemplos de grupos topológicos

1 Sea G un grupo. Definimos la topología discreta τ como la topología en la que cada punto es un conjunto abierto.

2 $\mathbb{R}^n$ con la topología usual y la operación suma.

3 $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ con la operación multiplicación y la topología relativa a $\mathbb{R}$.

4 $\mathbb{S}^1$ el círculo unitario con la topología relativa a $\mathbb{C}$ y la multiplicación de complejos.

5 $\mathcal{GL}(n)$, la colección de todas las matrices invertibles de $n \times n$, con la multiplicación usual de matrices, la identidad como elemento neutro y la topología relativa a $\mathbb{R}^{n\times n}$.

6 $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a > 0,\; b \in \mathbb{R} \right\}$.

Medidas de Haar

Definición

Dado un grupo topológico localmente compacto G decimos que una medida de Borel positiva μ, es una

- **medida de Haar izquierda**, si

$$\mu(xE) = \mu(E) \text{ para todo } E \in \mathcal{B}(G) \text{ y } x \in G.$$

- **medida de Haar derecha**, si

$$\mu(Ex) = \mu(E) \text{ para todo } E \in \mathcal{B}(G) \text{ y } x \in G.$$

donde $\mathcal{B}(G)$ es la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos.

Medidas de Haar

Definición

Dado un grupo topológico localmente compacto G decimos que una medida de Borel positiva μ, es una

- **medida de Haar izquierda**, si

$$\mu(xE) = \mu(E) \text{ para todo } E \in \mathcal{B}(G) \text{ y } x \in G.$$

- **medida de Haar derecha**, si

$$\mu(Ex) = \mu(E) \text{ para todo } E \in \mathcal{B}(G) \text{ y } x \in G.$$

donde $\mathcal{B}(G)$ es la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos.

Teorema

Sea G grupo topológico localmente compacto. Entonces existe una medida de Haar izquierda μ, que es única salvo por multiplicación por una constante positiva.

Propiedades básicas

La medida de Haar izquierda es una medida semi-regular:

- $\mu(K) < \infty$ para todo K compacto.
- $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U, U \text{abierto}\}$ para todo $E \in \mathcal{B}(G)$.
- $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subset U, K \text{compacto}\}$ para todo U abierto.

Además cumple

- $\mu(U) > 0$ si U es un abierto no vacio.
- $\int f d\mu > 0$ para toda función $f : G \to \mathbb{R}$, continua positiva.

Ejemplos medida de Haar izquierda.

1 En el grupo discreto es la medida de conteo sobre $\mathcal{P}(G)$, la cual esta definida por $\mu(E) = card(E)$ si la cardinalidad de E es finita y $\mu(E) = \infty$ en caso contrario. Además $\int f d\mu = \sum_{x \in X} f(x)$.

Ejemplos medida de Haar izquierda.

1. En el grupo discreto es la medida de conteo sobre $\mathcal{P}(G)$, la cual esta definida por $\mu(E) = card(E)$ si la cardinalidad de E es finita y $\mu(E) = \infty$ en caso contrario. Además $\int f d\mu = \sum_{x \in X} f(x)$.
2. En $\mathbb{R}^n$ la medida de Haar es $\lambda_n = \lambda \times \cdots \times \lambda$ la medida producto, donde λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

1. En el grupo discreto es la medida de conteo sobre $\mathcal{P}(G)$, la cual esta definida por $\mu(E) = card(E)$ si la cardinalidad de E es finita y $\mu(E) = \infty$ en caso contrario. Además $\int f d\mu = \sum_{x \in X} f(x)$.
2. En $\mathbb{R}^n$ la medida de Haar es $\lambda_n = \lambda \times \cdots \times \lambda$ la medida producto, donde λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.
3. En $\mathbb{R}^+$, sea $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{R}$ definida como $\mu(E) = \int_E \frac{1}{x}\lambda(dx)$ para todo $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. Sea $y \in \mathbb{R}^+$ y $E \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. Entonces

$$\mu(yE) = \int \frac{1_{\{yE\}}(x)}{x}\, \lambda(dx) = \int \frac{1_{\{E\}}(y^{-1}x)}{x}\lambda(dx)$$

Por el teorema del cambio de variable, haciendo $u = y^{-1}x$

$$\mu(yE) = \int \frac{1_{\{E\}}(u)}{u}\lambda(du) = \mu(E).$$

Ejemplos medidas de Haar izquierda.

4 Dada $x \in \mathbb{S}^1$ existe $t \in [0, 2\pi)$ tal que $x = e^{it}$. Sea $E \subset \mathbb{S}^1$ definimos $\tilde{E} = \{t \in [0, 2\pi) \mid e^{it} \in E\}$ y sea $\tilde{\lambda} = \lambda(mod\ 2\pi)$. Entonces $\mu(E) = \int_{\tilde{E}} e^{it} d\tilde{\lambda}$ es medida de Haar.

Ejemplos medidas de Haar izquierda.

4 Dada $x \in \mathbb{S}^1$ existe $t \in [0, 2\pi)$ tal que $x = e^{it}$. Sea $E \subset \mathbb{S}^1$ definimos $\tilde{E} = \{t \in [0, 2\pi) \mid e^{it} \in E\}$ y sea $\tilde{\lambda} = \lambda(mod\ 2\pi)$. Entonces $\mu(E) = \int_{\tilde{E}} e^{it} d\tilde{\lambda}$ es medida de Haar.

5 En $\mathcal{GL}(n)$, la medida de Haar es

$$\mu(E) = \int_E \frac{1}{|det(X)|^n} \lambda_{n^2}(dX).$$

Ejemplo medida de Haar izquierda diferente a medida de Haar derecha.

Para el grupo topológico $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a > 0,\ b \in \mathbb{R} \right\}$, la medida de Haar izquierda es

$$\mu(E) = \int\limits_{\varphi(E)} \frac{1}{a^2} \lambda(da)\lambda(db)$$

y la medida de Haar derecha es

$$\check{\mu}(E) = \int\limits_{\varphi(E)} \frac{1}{a} \lambda(da)\lambda(db).$$

Donde $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (a, b)$.

Relación entre las propiedades del grupo y las propiedades de la medida

- G es discreto si y sólo si $\mu(x) > 0$ para alguna $x \in G$.

Relación entre las propiedades del grupo y las propiedades de la medida

- G es discreto si y sólo si $\mu(x) > 0$ para alguna $x \in G$.
- G es compacto si y sólo si μ es una medida finita.

Relación entre las propiedades del grupo y las propiedades de la medida

- G es discreto si y sólo si $\mu(x) > 0$ para alguna $x \in G$.
- G es compacto si y sólo si μ es una medida finita.
- G es σ-compacto si y sólo si μ es una medida σ-finita.

Relación entre las propiedades del grupo y las propiedades de la medida

- G es discreto si y sólo si $\mu(x) > 0$ para alguna $x \in G$.
- G es compacto si y sólo si μ es una medida finita.
- G es σ-compacto si y sólo si μ es una medida σ-finita.
- G es discreto o σ-compacto si y sólo si μ es regular; $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{compacto}\}$ para todo E conjunto medible.

Función modular

Observación

Si definimos $\check{\mu}(E) = \mu(E^{-1})$, entonces $\check{\mu}$ es una medida de Haar derecha si y sólo si μ es una medida de Haar izquierda.

Función modular

Observación

Si definimos $\check{\mu}(E) = \mu(E^{-1})$, entonces $\check{\mu}$ es una medida de Haar derecha si y sólo si μ es una medida de Haar izquierda.

Definición

Definimos la función modular $\Delta : G \to \mathbb{R}$ como $\Delta(x)$ tal que

$$\mu(Ex) = \Delta(x)\mu(E).$$

Función modular

Observación

Si definimos $\check{\mu}(E) = \mu(E^{-1})$, entonces $\check{\mu}$ es una medida de Haar derecha si y sólo si μ es una medida de Haar izquierda.

Definición

Definimos la función modular $\Delta : G \to \mathbb{R}$ como $\Delta(x)$ tal que

$$\mu(Ex) = \Delta(x)\mu(E).$$

Teorema

Sea G un grupo localmente compacto, μ una medida de Haar izquierda, y $E \in \mathcal{B}(G)$. Se cumple que

$$\check{\mu}(E) = \int_E \Delta(x^{-1})\mu(dx).$$

Ejemplo

Definición

Decimos que G es unimodular si $\Delta(x) = 1$ para todo $x \in G$. Además $\Delta \equiv 1$ si y sólo si $\mu = \check{\mu}$.

Ejemplo

Definición

Decimos que G es unimodular si $\Delta(x) = 1$ para todo $x \in G$. Además $\Delta \equiv 1$ si y sólo si $\mu = \check{\mu}$.

Ejemplo

Para $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a > 0,\; b \in \mathbb{R} \right\}$ la función modular está dada por

$$\Delta \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a}.$$

Grupo no unimodular

Teorema

Dado G un grupo localmente compacto no unimodular existe un conjunto abierto W tal que $\mu(W) < \infty$ y $\check{\mu}(W) = \infty$.

Grupo no unimodular

Teorema

Dado G un grupo localmente compacto no unimodular existe un conjunto abierto W tal que $\mu(W) < \infty$ y $\check{\mu}(W) = \infty$.

Ejemplo

Para nuestro ejemplo el siguiente conjunto sirve

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \;\middle|\; a \in (1, \infty),\ b \in (0, 1) \right\}.$$

$\mu(W) = 1$ y $\check{\mu}(W) = \infty$.

Conjuntos medibles y medida de Haar.

Teorema (Vitali)

Sea G es un grupo topológico localmente compacto no discreto. Entonces existe un conjunto $E \subset G$ que no es medible respecto a la medida de Haar izquierda.

Conjuntos medibles y medida de Haar.

Teorema (Vitali)

Sea G es un grupo topológico localmente compacto no discreto. Entonces existe un conjunto $E \subset G$ que no es medible respecto a la medida de Haar izquierda.

Teorema de densidad de Lebesgue

Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda. Sea E un boreliano acotado. Sea U un conjunto abierto y acotada que contiene al neutro e. Definimos la función $f_U : G \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_U(x) = \frac{\mu(E \cap Ux)}{\mu(Ux)}.$$

Entonces f_U converge a $1_{\{E\}}$ en $\mathcal{L}^1(G)$ cuando $U \to e$.

Conjuntos medibles y medida de Haar.

Teorema de Steinhaus

Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda. Si $E \in \mathcal{B}(G)$ con $0 < \mu(E) < \infty$ entonces EE^{-1} contiene una vecindad de e.

Conjuntos medibles y medida de Haar.

Teorema de Steinhaus

Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda. Si $E \in \mathcal{B}(G)$ con $0 < \mu(E) < \infty$ entonces EE^{-1} contiene una vecindad de e.

Definición

- Decimos que ν es absolutamente continua con respecto a μ, $\nu << \mu$, si $\nu(E) = 0$ siempre que $\mu(E) = 0$.
- Decimos que ν es singular con respecto a μ, $\nu \perp \mu$, si existe un conjunto $E \in \mathcal{B}(G)$ tal que $\nu(G \setminus E) = 0$ y $\mu(E) = 0$.

Caracterización de medidas

Teorema

Sea G un grupo σ-compacto y μ una medida de Haar izquierda. Dada ν una medida con signo regular con variación total $|\nu|$ son equivalentes

a) $\nu << \mu$.

b) Todo conjunto E con $|\nu|(E) > 0$ cumple que $(EE^{-1})^{\circ} \neq \emptyset$.

c) Si A y B son conjuntos con $|\nu|(A) > 0$ y $|\nu|(B) > 0$ entonces $(AB^{-1})^{\circ} \neq \emptyset$.

Caracterización de medidas

Teorema

Sea G un grupo σ-compacto y μ una medida de Haar izquierda. Dada ν una medida con signo regular con variación total $|\nu|$ son equivalentes

a) $\nu << \mu$.
b) Todo conjunto E con $|\nu|(E) > 0$ cumple que $(EE^{-1})^{\circ} \neq \emptyset$.
c) Si A y B son conjuntos con $|\nu|(A) > 0$ y $|\nu|(B) > 0$ entonces $(AB^{-1})^{\circ} \neq \emptyset$.

Teorema

Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda. Entonces ν una medida con signo regular finita es singular con respecto a μ si y sólo si ν está concentrada en un σ-compacto B tal que $(BB^{-1})^{\circ} = \emptyset$.

Definición

Definimos la convolución de f con g, denotada por $f * g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f{*}g(t) = \begin{cases} \int f(s)g(s^{-1}t)d\mu(s) & \text{si } s \mapsto f(s)g(s^{-1}t) \in \mathcal{L}^1(G,\mu) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Álgebra $\mathcal{L}^1(G)$

Definición

Definimos la convolución de f con g, denotada por $f * g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f*g(t) = \begin{cases} \int f(s)g(s^{-1}t)d\mu(s) & \text{si } s \mapsto f(s)g(s^{-1}t) \in \mathcal{L}^1(G,\mu) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Teorema

$\mathcal{L}^1(G)$ es un álgebra de Banach con la convolución como multiplicación del álgebra.

Relación entre las propiedades del grupo y las propiedades de $\mathcal{L}^1(G)$

- G es conmutativo si y sólo si $\mathcal{L}^1(G)$ es conmutativo. $(f * g = g * f)$.

Relación entre las propiedades del grupo y las propiedades de $\mathcal{L}^1(G)$

- G es conmutativo si y sólo si $\mathcal{L}^1(G)$ es conmutativo. $(f * g = g * f)$.
- G es discreto si y sólo si $\mathcal{L}^1(G)$ tiene unidad (exista $1 \in \mathcal{L}^1(G)$ tal que $f * 1 = 1 * f = f$).

Relación entre las propiedades del grupo y las propiedades de $\mathcal{L}^1(G)$

- G es conmutativo si y sólo si $\mathcal{L}^1(G)$ es conmutativo. $(f * g = g * f)$.
- G es discreto si y sólo si $\mathcal{L}^1(G)$ tiene unidad (exista $1 \in \mathcal{L}^1(G)$ tal que $f * 1 = 1 * f = f$).

Teorema

Dadas $f \in \mathcal{L}^p(G)$ y $\epsilon > 0$ existe V conjunto abierto que contiene al neutro tal que

$$\|f * u - f\|_p < \epsilon \quad \text{y} \quad \|u * f - f\|_p < \epsilon$$

para toda $u \in \mathcal{L}^1(G)$ con $u \geq 0$, $sop(u) \subset V$ y $\int u d\mu = 1$.

Medidas con signo semi-regularesedidas con signo semi-regulares.

Definición

Definimos la convolución de μ con ν, denotada por $\mu * \nu$, como

$$(\mu * \nu)(E) = (\mu \times \nu)(\{(x, y) \in G \times G : xy \in E\}).$$

Medidas con signo semi-regularesedidas con signo semi-regulares.

Definición

Definimos la convolución de μ con ν, denotada por $\mu * \nu$, como

$$(\mu * \nu)(E) = (\mu \times \nu)(\{(x, y) \in G \times G : xy \in E\}).$$

Teorema

Si μ y ν son medidas finitas semi-regulares y f es una función acotada, entonces

$$\int f d(\mu * \nu) = \int \int f(xy) d\mu(x) d\nu(y) = \int \int f(xy) d\nu(y) d\mu(x).$$

Medidas con signo semi-regularesedidas con signo semi-regulares.

Definición

Definimos la convolución de μ con ν, denotada por $\mu * \nu$, como

$$(\mu * \nu)(E) = (\mu \times \nu)(\{(x, y) \in G \times G : xy \in E\}).$$

Teorema

Si μ y ν son medidas finitas semi-regulares y f es una función acotada, entonces

$$\int f d(\mu * \nu) = \int \int f(xy) d\mu(x) d\nu(y) = \int \int f(xy) d\nu(y) d\mu(x).$$

Teorema

$M(G)$, el espacio de la medidas con signo semi-regulares, con la convolución como multiplicación es un álgebra de Banach.

Definición

$$M_a(G) = \{\nu \in M(G) \mid \nu << \mu\}.$$

Radon-Nikodym

Definición

$M_a(G) = \{\nu \in M(G) \mid \nu << \mu\}$.

Teorema

El mapeo $f \mapsto \nu_f$, dado por $\nu_f(E) = \int_E f d\mu$, es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{L}^1(G, \mu)$ y $M_a(G)$.

Gracias