Polinomios Ortogonales y Gráficas k-distantes del Hipercubo

Marco Tulio Gaxiola Leyva

CIMAT

SIMA 25 Abril de 2014

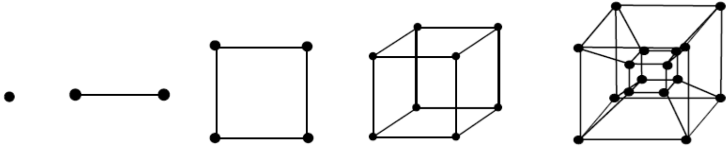
Definición

Sea V un conjunto no vacío y sea E un subconjunto de $V \times V$. El par $G = (V, E)$ se llama **gráfica** *con conjunto de vértices V y conjunto de aristas E. Decimos que dos vértices $v_i,\ v_j \in V$ son adyacentes si $(v_i, v_j) \in E$ y escribimos $v_i \sim v_j$.*

Definición

Llamamos **lazo** *a un arista de la forma (v_i, v_i) y decimos que una gráfica es* **simple** *cuando no tiene lazos. Una gráfica se dice* **no dirigida** *si $(v_i, v_j) \in E$ implica que $(v_j, v_i) \in E$.*

El hipercubo de dimensión n, Q_n. $V = \{\{0,1\}^n\}$,
$E = \{(v_i, v_j) \in V : \|v_i - v_j\| = 1|\}$, donde para $v \in \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ denota la norma usual.



Definición

Sea G una gráfica sin aristas múltiples. La matriz de adyacencia de G es la matriz A, indexada por el conjunto de vértices $V(G)$, donde $A_{xy} = 1$ si $xy \in E(G)$ y $A_{xy} = 0$ en otro caso. De manera similar, si tenemos una multigráfica (incluso con lazos), definimos A_{xy} como el número de aristas de x a y.

El espectro de la gráfica G es por definición el espectro de su matriz de adyacencia.

- ¿Qué información podemos obtener del espectro de una gráfica?

- ¿Qué información podemos obtener del espectro de una gráfica?
- $A^2_{ii} = \deg(v_i)$

- ¿Qué información podemos obtener del espectro de una gráfica?
- $A_{ii}^2 = \deg(v_i)$
- $\left(A^k\right)_{ij} = \#$caminos de tamaño k de i a j.

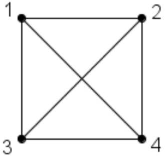
- ¿Qué información podemos obtener del espectro de una gráfica?
- $A_{ii}^2 = \deg(v_i)$
- $\left(A^k\right)_{ij} = \#$caminos de tamaño k de i a j.
- $\mathrm{Tr}\left(A^2\right) = \sum \lambda_i^2 := 2\#$aristas

- ¿Qué información podemos obtener del espectro de una gráfica?
- $A^2_{ii} = \deg(v_i)$
- $\left(A^k\right)_{ij} = \#$caminos de tamaño k de i a j.
- $\mathrm{Tr}\left(A^2\right) = \sum \lambda_i^2 := 2\#$aristas
- $\frac{\mathrm{Tr}\left(A^3\right)}{6} := \#$triángulos

- ¿Qué información podemos obtener del espectro de una gráfica?
- $A^2_{ii} = \deg\left(v_i\right)$
- $\left(A^k\right)_{ij} = \#$caminos de tamaño k de i a j.
- $\mathrm{Tr}\left(A^2\right) = \sum \lambda_i^2 := 2\#$aristas
- $\frac{\mathrm{Tr}\left(A^3\right)}{6} := \#$triángulos
- Conectividad

- ¿Qué información podemos obtener del espectro de una gráfica?
- $A_{ii}^2 = \deg(v_i)$
- $\left(A^k\right)_{ij} = \#$caminos de tamaño k de i a j.
- $\mathrm{Tr}\left(A^2\right) = \sum \lambda_i^2 := 2\#$aristas
- $\frac{\mathrm{Tr}\left(A^3\right)}{6} := \#$triángulos
- Conectividad
- Coloración

Gráficas completas



$$K_4 = \qquad A_{K_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Spec}(K_4) = \{3,\ -1,\ -1,\ -1\} = \left\{3,\ -1^{(3)}\right\}.$$

En general para K_n se tiene que $A_{K_n} = J_n - I_n$ como J_n tiene espectro $\left\{n^{(1)},\ 0^{(n-1)}\right\}$ e I_n tiene espectro $\left\{1^{(n)}\right\}$, entonces
$\mathrm{Spec}(K_n) = \left\{(n-1)^{(1)},\ -1^{(n-1)}\right\}$

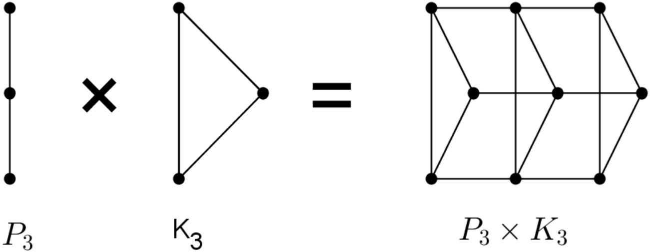
Producto directo

Definición

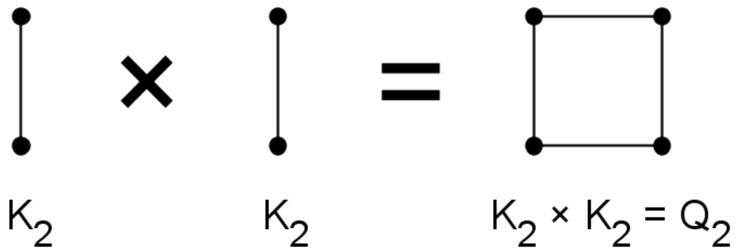
Sean $G_1 = (V_1,\ E_1)$ *y* $G_2 = (V_2,\ E_2)$ *dos gráficas. El* **producto directo** *(cartesiano) de* G_1 *con* G_2 *está denotado por* $G_1 \times G_2$ *es la gráfica con conjunto de vértices* $V = V_1 \times V_2$ *y conjunto de aristas* E*, de tal forma que para* $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V_1 \times V_2$ *el arista* $e = (v_1, w_1) \sim (v_2, w_2) \in E$ *si y solo si alguna de las condiciones se satisfacen*

$$
\begin{aligned}
1.\ v_1 &= v_2 \text{ y } w_1 \sim w_2 \\
2.\ v_1 &\sim v_2 \text{ y } w_1 = w_2.
\end{aligned}
$$

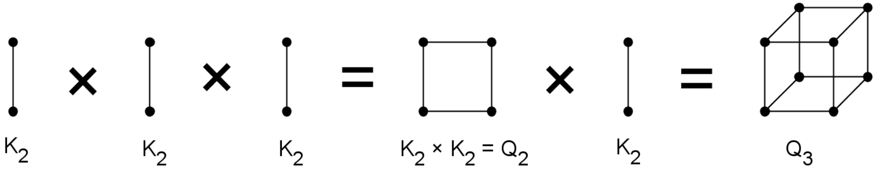
El producto directo del camino de longitud 3 P_3, con la gráfica completa de tres vértices K_3,



El hipercubo Q_n, puede ser visto como el producto directo n-veces de K_2 consigo mismo. A continuación se muestra Q_2 visto como el producto directo de K_2 con K_2, es decir, $Q_2 = K_2 \times K_2$,



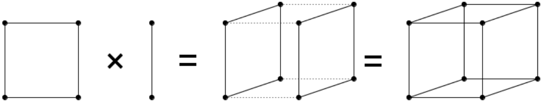
Entonces, podemos escribir también a Q_3 como
$Q_3 = K_2 \times K_2 \times K_2 = Q_2 \times K_2$,



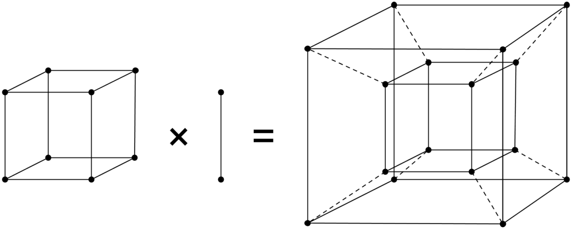
así, de manera inductiva, se tiene que

$$Q_n = Q_{n-1} \times K_2 = \underbrace{K_2 \times K_2 \times \cdots \times K_2}_{n\text{-veces}}.$$

$Q_3 = Q_2 \times K_2 =$



$Q_4 = Q_3 \times K_2 =$



Hipercubo

Para $n \geq 2$, sea Q_n el hipercubo de dimensión n, entonces la matriz de adyacencia A_{Q_n} cumple que

$$A_{Q_n} = \begin{pmatrix} A_{Q_{n-1}} & I_{2^{n-1}} \\ I_{2^{n-1}} & A_{Q_{n-1}} \end{pmatrix},$$

donde $A_{Q_{n-1}}$ es la matriz de adyacencia del hipercubo de dimensión $n-1$ Q_{n-1}, e $I_{2^{n-1}}$ es la matriz identidad de dimensión $2^{n-1} \times 2^{n-1}$.

Lema

La matriz de adyacencia del hipercubo de dimensión n se puede escribir como

$$A_{Q_n} = A_{Q_{n-1}} \otimes I_{2^{n-1}} + I_{2^{n-1}} \otimes A_{Q_{n-1}},$$

donde $A_{Q_{n-1}}$ es la matriz de adyacencia del hipercubo de dimensión $n-1$, e $I_{2^{n-1}}$ es la matriz identidad de dimensión $2^{n-1} \times 2^{n-1}$.

Teorema

Sean G y H gráficas con eigenvalores λ_1, ..., λ_m y μ_1, ..., μ_n respectivamente. Los mn eigenvalores del producto cartesiano $G \times H$ son las sumas $\lambda_i + \mu_j$ para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}\,(Q_1) &= \mathrm{Spec}\,(K_2) = \{-1, 1\} \\ \mathrm{Spec}\,(Q_2) &= \{-2,\ 0,\ 0,\ 2\} \\ \mathrm{Spec}\,(Q_3) &= \{-3,\ -1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 3\} \end{aligned}$$

n	Eigenvalues	Multiplicity
1	–1, 1	1, 1
2	–2, 0, 2	1, 2, 1
3	–3, –1, 1, 3	1, 3, 3, 1
4	–4, –2, 0, 2, 4	1, 4, 6, 4, 1
...	...	...
k	$-k, -k+2, -k+4, \ldots$ $k-4, k-2, k$	$\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \ldots \binom{k}{k-1}, \binom{k}{k}$

Definición

Sea $G = (V, E)$ una gráfica finita. La **distribución espectral** *de G está dada por*

$$\mu_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i}.$$

Esto es, a cada eigenvalor le damos probabilidad $1/n$

Observemos que la definición anterior es equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}} x^k d\mu_G(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = \mathrm{tr}\left(A^k\right), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

donde $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{Tr}(A)/n$.

Teorema del Límite Central (Hipercubo)

Teorema

Sea Q_n el hipercubo de dimensión n, y sea A_{Q_n} su matriz de adyacencia, entonces se tiene que

$$\frac{A_{Q_n}}{\sqrt{n}} \longrightarrow N\left(0, 1\right).$$

Definición

Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de números complejos, y sea* $\mathcal{L}$ *una función compleja en el espacio vectorial de todos los polinomios, definida por*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[x^n\right] &= a_n, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \\ \mathcal{L}\left[\alpha_1 \pi_1(x) + \alpha_2 \pi_2(x)\right] &= \alpha_1 \mathcal{L}\left[\pi_1(x)\right] + \alpha_2 \mathcal{L}\left[\pi_2(x)\right], \end{aligned}$$

para todo número complejo α_i *y todo polinomio* $\pi_i(x)$ *(*$i = 1,\ 2$*). A* $\mathcal{L}$ *le llamamos el* **funcional de momentos**, *determinado por la* **sucesión de momentos** $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. *Al número* a_n *le llamamos el momento de orden n (o el n-ésimo momento).*

Definición

Una sucesión $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *se llama* **sucesión de polinomios ortogonales**, *con respecto al funcional de momentos* $\mathcal{L}$, *si para todo entero no negativo* m *y* n *se cumple que*

(i) $P_n(x)$ *es un polinomio de grado* n,

(ii) $\mathcal{L}[P_n(x)\, P_m(x)] = 0$ *para* $m \neq n$,

(iii) $\mathcal{L}\left[P_n^2(x)\right] \neq 0$.

Teorema

Sea $\mathcal{L}$ un funcional de momentos quasi-definido y sea $\{P_n(x)\}$, su correspondiente sucesión de polinomios mónicos ortogonales, entonces existen constantes c_n y $\lambda_n \neq 0$ tales que

$$P_n(x) = (x - c_n) P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

donde, por definición, $P_{-1}(x) = 0$.
Además, si $\mathcal{L}$ es positivo-definido, entonces c_n es real y $\lambda_{n+1} > 0$ para $n \geq 1$ (λ_1 es arbitrario).

Dados un entero $N \geq 1$, y un número real $0 < p < 1$, definimos los *polinomios de Krawtchouk* $k_n^{(N,p)}(x)$ como

$$\begin{aligned} k_n^{(N,p)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-N)_{n-k}(x-k+1)_k}{(n-k)!k!} p^{n-k}(1-p)^k \\ &= (-p)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(-x)_k}{(-N)_k} p^{-k}, \end{aligned}$$

donde $(a)_0 = 1$, $(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$.

$$\sum_{k=0}^{n} k_m^{(N,p)}(x)\, k_n^{(N,p)}(x) \left(\begin{array}{c} N \\ x \end{array} \right) p^x (1-p)^{N-x} = \left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right) p^n (1-p)^n \delta_{mn}$$

Polinomios Ortogonales

Polinomios de Krawtchouk (Fórmula de Recurrencia)

$$
\begin{aligned}
k_0^{(N,p)}(x) &= 1 \\
k_1^{(N,p)}(x) &= x - pN \\
xk_n^{(N,p)}(x) &= (n+1)\, k_n^{(N,p)}(x) \\
&\quad + (pN + n - 2pn)\, k_n^{(N,p)}(x) + p\,(1-p)\,(N-n+1)\, k_{n-1}^{(N,p)}
\end{aligned}
$$

- $$K_n^{(N)}(x) = 2^n n! k_n^{(N,1/2)}\left(\frac{x+N}{2}\right), \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

- $$K_n^{(N)}(x) = 2^n n! k_n^{(N,1/2)}\left(\frac{x+N}{2}\right), \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$
- $\left\{K_n^{(N)}(x)\right\}$ son ortogonales con respecto a
$$\beta_N = \sum_{j=0}^{N} \left(\begin{array}{c} N \\ j \end{array} \right) \frac{1}{2^N}\delta_{-N+2j}.$$

- $$K_n^{(N)}(x) = 2^n n! k_n^{(N,1/2)}\left(\frac{x+N}{2}\right), \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

- $\left\{K_n^{(N)}(x)\right\}$ son ortogonales con respecto a

$$\beta_N = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} \frac{1}{2^N}\delta_{-N+2j}.$$

- Fórmula de recurrencia:

$$\begin{aligned} K_0^{(N)}(x) &= 1, \qquad K_1^{(N)}(x) = x, \\ xK_n^{(N)}(x) &= K_{n+1}^{(N)}(x) + (N-n+1)\, nK_{n-1}^{(N)}(x). \end{aligned}$$

- Definimos los *polinomios de Hermite* como

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

y observemos que $\{H_n(x)\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ son polinomios de grado n.

- Definimos los *polinomios de Hermite* como

$$H_n\left(x\right) = \left(-1\right)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

y observemos que $\left\{H_n\left(x\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ son polinomios de grado n.

- Son ortogonales con respecto a e^{-x^2}

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m\left(x\right) H_n\left(x\right) e^{-x^2} dx = 2^n m! \sqrt{\pi} \delta_{nm}.$$

- Definimos los *polinomios de Hermite* como

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

y observemos que $\{H_n(x)\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ son polinomios de grado n.

- Son ortogonales con respecto a e^{-x^2}

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n m! \sqrt{\pi} \delta_{nm}.$$

- Fórmula de recurrencia

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \qquad H_1(x) = 2x, \\ 2xH_n(x) &= H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x). \end{aligned}$$

- Con la normalización

$$\tilde{H}_n(x) = 2^{-n/2} H_n(x) \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right),$$

se tiene que $\left\{ \tilde{H}_n(x) \right\}$ son ortogonales con respecto a $N(0,1)$.

- Con la normalización

$$\tilde{H}_n(x) = 2^{-n/2} H_n(x)\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

se tiene que $\left\{\tilde{H}_n(x)\right\}$ son ortogonales con respecto a $N(0,1)$.

- Fórmula de Recurrencia

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0(x) &= 1, \qquad \tilde{H}_1(x) = 2x, \\ x\tilde{H}_n(x) &= \tilde{H}_{n+1}(x) + n\tilde{H}_{n-1}(x). \end{aligned}$$

- Con la normalización

$$\tilde{H}_n(x) = 2^{-n/2} H_n(x)\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

se tiene que $\left\{\tilde{H}_n(x)\right\}$ son ortogonales con respecto a $N(0,1)$.

- Fórmula de Recurrencia

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0(x) &= 1, \qquad \tilde{H}_1(x) = 2x, \\ x\tilde{H}_n(x) &= \tilde{H}_{n+1}(x) + n\tilde{H}_{n-1}(x). \end{aligned}$$

- Se cumple que

$$\tilde{H}_k(x) = \lim_{N\longrightarrow\infty} N^{-k/2} K_k^{(N)}\left(\sqrt{N}x\right).$$

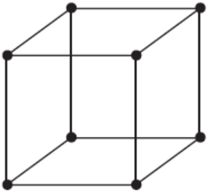
Gráficas k-distantes

Definición

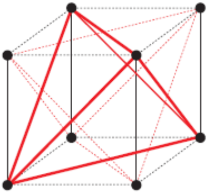
Dada una gráfica $G = (V,\ E)$ y un número entero positivo k definimos a la **gráfica** k**-distante** *como* $G^{[k]} = \left(V,\ E^{[k]}\right)$, *con*

$$E^{[k]} = \left\{(x,y) : x,y \in V,\ \partial_G\,(x,y) = k\right\},$$

donde ∂_G es la distancia gráfica.



$K_2 \times K_2 \times K_2$



$(K_2 \times K_2 \times K_2)^{[2]}$

- Recordando

$$A_{Q_N} = \sum_{i=1}^{N} I \otimes \cdots \otimes I \otimes A_{Q_1} \otimes I \otimes \cdots \otimes I.$$

Gráficas k-distantes

- Recordando

$$A_{Q_N} = \sum_{i=1}^{N} I \otimes \cdots \otimes I \otimes A_{Q_1} \otimes I \otimes \cdots \otimes I.$$

- De manera inductiva (sobre N), para k fijo, se obtiene que

$$A_{Q_N}^{[k]} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq N} I \otimes \cdots \otimes I \otimes A_{Q_1} \cdots \otimes A_{Q_1} \otimes I.$$

Gráficas k-distantes

- Recordando

$$A_{Q_N} = \sum_{i=1}^{N} I \otimes \cdots \otimes I \otimes A_{Q_1} \otimes I \otimes \cdots \otimes I.$$

- De manera inductiva (sobre N), para k fijo, se obtiene que

$$A_{Q_N}^{[k]} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le N} I \otimes \cdots \otimes I \otimes A_{Q_1} \cdots \otimes A_{Q_1} \otimes I.$$

- Ejemplo, $k = 2$ y $N = 3$

$$A_{Q_3}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} A_{Q_1} \otimes A_{Q_1} \otimes I \\ + A_{Q_1} \otimes I \otimes A_{Q_1} \\ + I \otimes A_{Q_1} \otimes A_{Q_1}. \end{array}$$

Gráficas k-distantes

Lema

Sea $N \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= I, \qquad A^{(1)} = A \\ AA^{(k)} &= (k+1)\, A^{(k+1)} + (N-k+1)\, A^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Lema

La matriz de adyacencia de la gráfica k-distante del hipercubo de dimensión N está dada por

$$A^{[k]} = \frac{1}{k!} K_k^{(N)}(A)\,, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Gráficas k-distantes

Lema

Sea A la matriz de adyacencia del hipercubo de dimensión N, y sea $\varphi_{tr}(A) = tr(A)$, *entonces se cumple que*

$$\varphi_{tr}(A^m) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \beta_N(dx), \qquad m = 1,\ 2,\ ....$$

Lema

Sea $A^{[k]}$ *la matriz de adyacencia de la gráfica k-distante del hipercubo de dimensión N, entonces*

$$\varphi_{tr}\left(\left(A^{[k]}\right)^m\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{k!}K_k^{(N)}(x)\right\}^m \beta_N(dx), \qquad m = 1,\ 2,\ ....$$

Gráficas k-distantes

Sea $\tilde{\beta}_N$ la normalizacion de β_N, es decir

$$\tilde{\beta}_N = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} \frac{1}{2^N} \delta_{-\sqrt{N}+2j/\sqrt{N}}.$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
& \binom{N}{k}^{-m/2} \varphi_{tr}\left(\left(A^{[k]}\right)^m\right) \\
= \; & \left\{k!N(N-1)\cdots(N-k+1)\right\}^{-m/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{K_k^{(N)}(x)\right\}^m \beta_N(dx) \\
= \; & \left\{k!N(N-1)\cdots(N-k+1)\right\}^{-m/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{K_k^{(N)}\left(\sqrt{N}x\right)\right\}^m \tilde{\beta}_N(dx).
\end{aligned}$$

Tomando el límite, se obtiene que

$$
\begin{aligned}
& \lim_{N\longrightarrow\infty} \binom{N}{k}^{-m/2} \varphi_{tr}\left(\left(A^{[k]}\right)^m\right) \\
= & \lim_{N\longrightarrow\infty} \left\{k!N(N-1)\cdots(N-k+1)\right\}^{-m/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{K_k^{(N)}\left(\sqrt{N}x\right)\right\}^m \tilde{\beta}_N (\\
= & (k!)^{-m/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\tilde{H}_k(x)\right\} e^{-x^2/2} dx.
\end{aligned}
$$

¡GRACIAS!